

## VOTES ET PARADOXES : LES ÉLECTIONS NE SONT PAS MONOTONES !<sup>1</sup>

Olivier HUDRY<sup>2</sup>

**RÉSUMÉ** — *Cet article a pour objectif d'illustrer un certain nombre de paradoxes que l'on rencontre en théorie du vote, que ce soit pour élire une seule personne par un scrutin uninominal ou plusieurs selon un mode de scrutin proportionnel. Conçu à partir d'exemples simples, il a pour ambition de s'adresser à un large public plutôt qu'aux chercheurs seulement. Certains de ces exemples exploitent le fait que les procédures de vote ne sont pas nécessairement monotones ; d'autres illustrent d'autres types de paradoxes.*

**MOTS-CLÉS** — Théorie du vote, Paradoxes, Scrutin à deux tours, Borda, Condorcet, Représentation proportionnelle, Hamilton, Jefferson

**SUMMARY** — *Votes and Paradoxes: Elections are not Monotonous!*  
*The aim of this paper is to illustrate some paradoxes arising from voting theory, in order to elect one person as well as several ones with a system of proportional representation. Based on simple examples, its ambition is to reach a large audience rather than researchers only. Some of these examples exploit the fact that voting procedures are not necessarily monotonous; some others illustrate other kinds of paradoxes.*

**KEYWORDS** — Voting Theory, Paradoxes, Two-Round Voting, Borda, Condorcet, Proportional Representation, Hamilton, Jefferson

### 1. INTRODUCTION

Conçu à partir d'exemples simples, cet article a pour ambition de s'adresser à un large public plutôt qu'aux chercheurs seulement. Son objectif est d'illustrer un certain nombre de paradoxes que l'on rencontre en théorie du vote. Ici, « paradoxe » est à prendre au sens courant d'un phénomène allant à l'encontre des opinions communément admises et non au sens d'une contradiction logique insurmontable. On s'apercevra donc que les paradoxes décrits ci-dessous reposent sur des préjugés : ils exploitent le fait que l'on considère comme acquises certaines propriétés que l'on imagine (ou que l'on souhaiterait) vérifiées par les modes de scrutin envisagés, alors qu'elles ne le sont pas, et non sur des propriétés dont on aurait démontré la validité et qui se révéleraient antinomiques *in fine*. Ainsi des réponses habituelles aux questions suivantes : dans une élection présidentielle en France, est-il possible qu'un candidat préféré à n'importe quel autre candidat par une majorité de votants ne soit pas élu ? Pour ce même genre d'élection, le « vote utile » peut-il empêcher celui qui en bénéficie d'être élu ? Peut-on avoir intérêt à voter pour son pire adversaire plutôt que pour son candidat préféré pour

---

<sup>1</sup> Article reçu le 26 février 2003, révisé le 09 juillet 2003, accepté le 10 juillet 2003.

<sup>2</sup> École nationale supérieure des télécommunications, 46, rue Barrault, 75634 Paris cedex 13, hudry@enst.fr

faire élire celui-ci ? Y a-t-il des modes de scrutin pour lesquels on peut avoir intérêt à s'abstenir plutôt que de voter pour son candidat préféré ? Un parti peut-il avoir la majorité absolue dans une assemblée en ne représentant qu'une minorité des votants ? Dans un vote à la proportionnelle, augmenter le nombre total de sièges peut-il faire perdre des sièges à une liste ? Peut-on devenir élu en régressant dans les préférences des votants ? etc. C'est à ce genre de questions que nous essaierons de répondre dans cet article.

Parmi ces propriétés qui semblent tellement naturelles qu'on les tient d'emblée pour satisfaites figure la *monotonie*, propriété mise en cause dans la dernière question que l'on vient de poser. En termes non techniques (pour une définition rigoureuse, voir l'article de B. Monjardet [2003] dans ce même numéro), la monotonie est la propriété qui fait que si un candidat  $x$  est élu pour des préférences individuelles données, il le reste si un des votants attribue à  $x$  une meilleure place dans sa préférence sans modifier ses préférences relatives aux autres candidats. Si la monotonie semble être une propriété raisonnable, il se trouve néanmoins que de nombreux modes de scrutin ne sont pas monotones, et c'est ce qui conduit, du moins dans certains cas, à des résultats contre-intuitifs. On trouvera aussi dans ce qui suit des effets paradoxaux issus de variantes de la monotonie ; globalement, ils apparaissent quand on envisage des variations dont la conséquence, intuitivement, devrait être de renforcer la position d'un vainqueur alors que, dans les faits, il n'en est rien. Mais certains des paradoxes décrits ci-dessous peuvent aussi se poser sur d'autres ressorts<sup>3</sup>.

Plusieurs des paradoxes évoqués ci-dessous sont liés à l'histoire de la théorie du choix social. Cette histoire (ou plutôt une partie de celle-ci) fait l'objet de la section suivante, l'accent étant mis sur les recherches de la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, d'une part en France, avec les démarches de Borda et de Condorcet, d'autre part aux États-Unis, avec celles de Hamilton et de Jefferson. La troisième partie rappelle les principes du scrutin majoritaire uninominal à un ou deux tours ainsi que ceux des méthodes de Borda et de Condorcet et montre, sous forme d'une petite histoire électorale, que ces méthodes peuvent conduire à des résultats bien différents ; on y rencontre aussi ce que la littérature appelle « paradoxe du vote » ou « Effet Condorcet ». La plupart des paradoxes décrits dans cet article occupent la partie suivante ; ils concernent surtout le scrutin majoritaire uninominal à deux tours pour élire un unique candidat, la méthode de Borda, la règle majoritaire de Condorcet et les méthodes de Hamilton et de Jefferson utilisées dans des scrutins proportionnels destinés à élire plusieurs personnes à la fois. Enfin la conclusion donne des indications sur le caractère inéluctable des paradoxes en évoquant le célèbre théorème de K. Arrow [1951] et son pendant M. Balinski et P. Young [1982] pour les votes à la proportionnelle, ainsi que ceux d'H. Moulin et d'A.F. Gibbard et M. A. Satterthwaite.

Dans toute la suite, nous représenterons les candidats individuels à une élection par des lettres minuscules ( $i, j, x, y, z, t...$ ) et nous utiliserons des lettres majuscules quand il s'agira de listes regroupant plusieurs candidats ( $X, Y, Z, T...$ ). Sauf dans la conclusion, on supposera que les préférences des votants sont des ordres totaux, c'est-à-dire d'une part

<sup>3</sup> On trouvera différentes références relatives aux paradoxes abordés dans cet article au fil du texte. On pourra y ajouter le livre de H. Nurmi [1999] (dont les références permettront à leur tour de compléter celles données dans cet article). Par ailleurs, le lecteur intéressé trouvera d'autres types de paradoxes, relatifs aux indices utilisés pour mesurer le pouvoir de vote, dans l'article de N.-G. Andjiga *et alii* [2003] dans ce même numéro ; pour cette raison, nous n'aborderons pas ces paradoxes ici. Enfin, plus généralement, on trouvera à la fin de ce numéro une annexe bibliographique contenant une centaine de références de livres consacrés à la théorie du choix social, ainsi que l'adresse d'un site Internet (dû à J. S. Kelly) répertoriant un très grand nombre d'articles relatifs à ce sujet.

que, pour tout candidat  $x$  et tout candidat  $y$  avec  $x \neq y$ , un votant préférera strictement  $x$  à  $y$  ou  $y$  à  $x$  et, d'autre part, qu'un votant préférant  $x$  à  $y$  et  $y$  à  $z$ , où  $z$  désigne un troisième candidat, préférera aussi  $x$  à  $z$  (transitivité). Un tel ordre total sera représenté sous la forme  $x > y > z \dots$ , signifiant donc que le votant considéré préfère  $x$  à  $y$  et à  $z$ , préfère  $y$  à  $z$ , etc. Sauf mention contraire, on supposera encore que chaque votant se prononce selon ses véritables préférences (il s'agit d'un *vote sincère*, excluant la *manipulation*, c'est-à-dire le fait de ne pas voter selon ses véritables préférences dans un but stratégique), et que les préférences des votants sont immuables (ainsi, pour un vote à deux tours, on supposera que rien n'altère les préférences des votants entre les deux tours). Enfin, on appellera *profil* tout jeu de données décrivant les préférences des votants.

## 2. AUX ORIGINES DE LA THÉORIE DU CHOIX SOCIAL

Même si l'histoire du choix social ne débute pas avec Borda et Condorcet, on peut considérer que l'âge d'or de la théorie du choix social commence en France à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle<sup>4</sup>. Les minutes de l'Académie des sciences de Paris attestent en effet que ses membres s'interrogeaient sur le mode de scrutin à adopter pour l'élection des académiciens (pour une présentation plus complète que les grandes lignes rapportées ici, voir G. Th. Guilbaud [1952], D. Black [1958] ou I. McLean et A. Urken [1995]). Vont s'ensuivre, avec les travaux de Borda et de Condorcet, des réflexions critiques sur la recherche d'un mode de scrutin permettant de transformer le plus fidèlement possible un ensemble de préférences individuelles en une préférence collective.

Le 16 juin 1770, le chevalier Jean-Charles de Borda<sup>5</sup> lut devant l'Académie des sciences, dont il était membre, une étude intitulée *Sur la forme des élections* où il

<sup>4</sup> Dans leur livre, I. McLean et A. Urken [1995] citent trois précurseurs : l'avocat et écrivain latin Pline le Jeune (Caius Plinius Caecilius Secundus en latin, de 61 ou 62 à environ 114), le prolifique théologien espagnol Raymond Lulle (ou Ramón Llull en catalan, ou encore en espagnol Raimundo Lulio, né entre 1232 et 1235, mort en 1316) et le théologien et savant allemand Nikolaus Krebs ou Chryppffs dit Nicolas de Cues (ou Nicolas de Cusa, ou encore Niklaus von Cues, environ 1401-1464). Ils mentionnent aussi comme possible, mais non établie, la présence de préoccupations analogues dans les travaux de la période classique arabe du septième au treizième siècles ainsi que dans un contexte religieux pendant le Moyen Âge (voir [I. McLean et A. Urken, 1995] et [I. McLean, 1990] pour plus de détails). S'appuyant sur E. Stavely [1972], D. Saari [1994] évoque quant à lui Aristote et l'Antiquité, mais reconnaît que les préoccupations de l'époque concernent davantage la mise en œuvre des élections (qui peut voter, qui peut être candidat, comment éviter la fraude, etc.) que la recherche d'un mode de scrutin vérifiant des propriétés que l'on jugerait souhaitables. E. Lagerspetz [1986] cite aussi l'Allemand Samuel von Pufendorf (1632-1694), théoricien du droit naturel et du droit des nations.

<sup>5</sup> Jean-Charles de Borda est né à Dax en 1733, dixième d'une famille noble de seize enfants. Il est connu comme mathématicien, marin, militaire, ingénieur... Son *Mémoire sur le mouvement des projectiles* lui valut d'être attaché à l'Académie des sciences en 1756 comme membre associé ; il devint pensionnaire de la section de mathématiques en 1775. Entre autres travaux, il expérimenta les montres marines en 1771 au nom de l'Académie. En 1772, il utilisa pour la première fois le pendule pour mesurer l'intensité de la pesanteur. Il fut nommé lieutenant de vaisseau en 1775 (puis capitaine de vaisseau en 1779) et chargé la même année de déterminer la position exacte des Canaries ; il remplaça à cette occasion les anciennes méthodes magnétiques par celle des relèvements astronomiques. Il participa à la guerre d'Indépendance des États-Unis et fut capturé par les Anglais en 1782 alors qu'il commandait une flottille de six navires. Il contribua activement à l'élaboration du système métrique et conçut plusieurs instruments (certains peuvent être observés au musée du Conservatoire national des Arts et Métiers, à Paris) utilisés par P. Méchain et J.-B. J. Delambre, dans les années 1790, pour déterminer la longueur d'un arc de méridien et définir ainsi le mètre. Il resta actif jusqu'à sa mort, à Paris, en 1799 (pour de plus amples détails, le lecteur intéressé pourra se reporter à la biographie de J. Mascart [1919]).

montrait que le mode de scrutin à un tour, en vigueur à l'époque dans cette Académie, pouvait ne pas conduire à une solution satisfaisante, au sens précisé plus bas à l'aide d'un exemple. Puis, d'après les recherches effectuées par D. Black [1958], il semble que l'Académie des sciences n'aborda plus le problème des élections jusqu'en 1784 ; du moins n'en a-t-il pas trouvé de traces dans les minutes des débats ayant eu lieu de 1779 à 1783. En 1784, l'abbé Bossut et Charles Augustin de Coulomb présentèrent un rapport sur un manuscrit de Condorcet<sup>6</sup> [1785], intitulé *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Ce rapport fut suivi, quatre jours plus tard, d'une nouvelle communication de Borda relative aux problèmes de vote, complétée une semaine plus tard. Cependant, Borda précise dans le mémoire publié en 1784 sous le titre *Mémoires sur les élections au scrutin* [Borda, 1784] et daté de 1781 que les idées contenues dans le mémoire remontaient à plusieurs années. On y trouve aussi la méthode qu'il préconisait de substituer au scrutin classique pour pallier les inconvénients dénoncés dans ses interventions et que nous retrouverons plus bas.

Ayant eu connaissance des travaux de Borda, Condorcet en fit une critique et suggéra de remédier à la situation en effectuant des comparaisons par paires entre les candidats et en appliquant la *règle majoritaire*. Comme on le verra plus bas, celle-ci n'allait cependant pas donner toute satisfaction et, faute d'une autre méthode plus efficace, la procédure de Borda fut adoptée par l'Académie puis par l'Institut de France (fondé en octobre 1795 afin de reconstituer les académies supprimées en 1793) pour l'élection de ses membres jusqu'en 1803 (elle succomba en fait aux critiques formulées par Napoléon Bonaparte en 1800, alors président de la section de Mécanique de la première Classe de l'Institut et dont ce fut la seule intervention en six mois de présidence). En dépit de l'incompréhension dont les travaux de Condorcet furent l'objet (l'économiste J.S. Mill s'en indigne, le mathématicien J. Bertrand les trouve illisibles, inutiles et ridicules, H. Poincaré parle de résultats dénués de sens commun, etc.), la profondeur de la pensée de Condorcet peut à juste titre présenter ce mathématicien-philosophe comme le véritable fondateur de cette branche des mathématiques appliquées

---

<sup>6</sup> Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, marquis de Condorcet, est né à Ribemont, Picardie, en 1743. Mathématicien précoce, il soutint une thèse d'analyse à l'âge de seize ans, entre autres devant d'Alembert. Les travaux scientifiques qui suivirent (*Essai sur le calcul intégral* en 1765, mémoire sur le *Problème des trois corps* en 1767...) lui permirent d'entrer à l'Académie des sciences en 1769, avant d'en devenir secrétaire perpétuel en 1773 ; c'est en 1782 qu'il entra à l'Académie française. À côté de ses travaux scientifiques, auxquels il se consacra toute sa vie, il fut aussi un philosophe engagé en politique. Ami et héritier spirituel de d'Alembert, de Voltaire et de Turgot, il en hérita l'amour de la vérité, le refus de l'injustice et la passion du bien public. Il lutta contre l'esclavagisme, l'obscurantisme, la peine de mort, combattit l'oppression dont étaient victimes les Juifs et les Protestants, défendit la condition des femmes, des Noirs et des métis, etc. Collaborateur à l'Encyclopédie, athée et anticlérical, reconnu comme l'héritier des penseurs du XVIII<sup>e</sup> siècle et chef du « parti philosophique », républicain déclaré, il fut élu député à l'Assemblée législative (qu'il présida pendant un temps) puis à la Convention, malgré sa timidité et de piètres talents d'orateur. Ayant choisi le Comité d'Instruction publique (choix significatif) à l'Assemblée, il élaborait un vaste projet d'organisation de l'instruction publique ainsi qu'une constitution qui ne fut jamais appliquée, parmi d'autres travaux. Proche des Girondins (avant de se rapprocher des Montagnards), il fut décrété d'accusation après la chute de ceux-ci, en juillet 1793. Il put se cacher durant huit mois (pendant lesquels il écrivit son *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*), mais fut finalement découvert et incarcéré à la prison de Bourg-l'Égalité (actuellement Bourg-la-Reine). Il fut retrouvé mort (suicide ou apoplexie ? la question reste ouverte) dans sa cellule, le 29 mars 1794. Son œuvre s'étend donc sur plusieurs domaines, des mathématiques à la politique, en passant par la philosophie, l'économie et la théorie du choix social. Pour plus de détails sur la vie et l'œuvre de Condorcet, voir les livres de K.M. Baker [Baker, 1975], d'É. et R. Badinter [Badinter et Badinter, 1988] ou ceux édités sous la direction de P. Crépel et C. Gilain [1989] ou d'A.-M. Chouillet et P. Crépel [1997].

aux sciences sociales, Borda s'étant plus cantonné à un point de vue plus purement technique.

À peu près à la même époque (en 1792, après le recensement de 1791 devant permettre de déterminer la répartition des sièges entre les quinze états proportionnellement à leurs populations), le Congrès de la jeune République fédérée des États-Unis votait l'adoption de la méthode de représentation proportionnelle conçue par Alexander Hamilton<sup>7</sup>, fondée sur les quotas. Mais George Washington, alors président des États-Unis (de 1789 à 1797), exerça pour la première fois, en avril 1792, son droit de veto pour rejeter la méthode de Hamilton et lui substituer la méthode préconisée par Thomas Jefferson<sup>8</sup> (peut-être parce que celle-ci permettait d'attribuer un siège supplémentaire à la Virginie, dont Washington était originaire). Finalement le Congrès adopta la méthode de Jefferson, mais avec un autre nombre de sièges à pourvoir que celui initialement prévu. Celle-ci restera en vigueur jusqu'en 1842. Comme l'avantage qu'elle donnait aux gros états devenait de plus en plus flagrant, d'autres méthodes ont été proposées pour la remplacer : parmi elles, la plus favorable aux petits états est celle de John Quincy Adams, puis vient celle de James Dean, enfin celle de Daniel Webster<sup>9</sup>, cependant moins favorable aux gros états que la méthode de Jefferson. Ce n'est pourtant qu'en 1842 que cette dernière a été remplacée par la méthode de Webster (remplacement accompagné d'une réduction du nombre de sièges, ce qui est exceptionnel), elle-même abandonnée ultérieurement (en 1852) par le Congrès, au profit de la méthode de Hamilton, avant de revenir en 1901 (avec confirmation en 1911), pour finalement céder la place en 1941 à la méthode de Joseph A. Hill et Edward V. Huntington<sup>10</sup>, encore appliquée de nos jours (voir [Balinski et Young, 1982] pour plus de détails).

Du côté européen, on pourrait encore citer le Suisse Simon Lhuilier (1750-1840) [1794] (voir aussi [B. Monjardet, 1976]), l'Espagnol Joseph Isidoro Morales, les Français

<sup>7</sup> Alexander Hamilton est né aux Antilles, à Nevis, en 1757 et est mort à New York en 1804. Il écrit des pamphlets révolutionnaires dès 1774. Aide de camp et secrétaire de G. Washington en 1777, il participa à la guerre d'Indépendance puis contribua à la rédaction de la Constitution des États-Unis. Secrétaire au Trésor de 1789 à 1795, il organisa la Banque nationale et préconisa une politique de centralisation, ce qui lui valut l'opposition de T. Jefferson au sein du ministère. Après sa démission du ministère en 1795, il resta cependant l'un des conseillers les plus influents de Washington, mais son action brisa le parti fédéraliste qu'il avait fondé. Pour une biographie, voir par exemple le texte de L. M. de Carolis 1996], disponible sur Internet, et les références qu'il contient.

<sup>8</sup> Thomas Jefferson, né en Virginie en 1743, à Shadwell, était fils de planteur. Il rédigea la Déclaration d'indépendance du 4 juillet 1776. Il assuma divers rôles au sein de l'état américain : gouverneur de Virginie (1779-1781), ambassadeur à Paris (1785-1789) après Benjamin Franklin, secrétaire aux Affaires étrangères (1790)... Il démissionna du gouvernement en 1794 et fonda à ce moment le parti anti-fédéraliste, mais y revint comme vice-président en 1797 avant de devenir président des États-Unis de 1801 à 1809. Refusant un troisième mandat, il se retira alors de la vie publique pour retourner à Monticello, en Virginie, où il mourut en 1826. On trouvera plus d'indications sur la vie de Jefferson dans le livre de L. Weymouth [1973].

<sup>9</sup> John Quincy Adams (1767-1848), fils du deuxième président des États-Unis John Adams, fut lui-même président de 1825 à 1829 ; il est en particulier connu pour sa lutte contre l'esclavagisme. James Dean était professeur d'astronomie et de mathématiques à l'université du Vermont. Avocat en droit constitutionnel de formation, Daniel Webster (1782-1852) s'orienta vers la vie politique et devint député puis sénateur du Massachusetts ; sa personnalité a fortement marqué son époque : certains l'adulaient, le considérant comme le plus grand homme d'Amérique, tandis que d'autres le vouaient aux gémonies.

<sup>10</sup> Joseph A. Hill travailla comme statisticien au Bureau du recensement. Edward V. Huntington (1874-1952), camarade de J.A. Hill à Harvard, devint professeur de mécanique et de mathématiques à Harvard, où il laissa le souvenir d'un brillant pédagogue ; il s'impliqua dans plusieurs sociétés de mathématiques et fut aussi associé au Bureau du recensement pendant la guerre.

Pierre Claude François Daunou (1761-1840) et Pierre Simon, marquis de Laplace (1749-1827) [Laplace, 1795], qui s'intéressa lui aussi au problème sous l'angle du mérite ; par une démarche légèrement différente, il retrouva un classement identique à celui de Borda. Puis l'histoire de la théorie du choix social semble s'interrompre pendant le XIX<sup>e</sup> siècle, jusqu'en 1870, où on la voit resurgir en Angleterre sous la plume du révérend C. L. Dodgson (1832-1898), plus connu sous le pseudonyme de Lewis Carroll, puis celle d'E. J. Nanson (1850-1936) (voir [Black, 1958] et [McLean et Urken, 1995] pour plus de détails).

Les recherches de meilleures règles de choix collectif furent bouleversées en 1951, par le célèbre théorème d'Arrow [1951] : celui-ci établit que les difficultés rencontrées pour l'obtention d'un mode de scrutin « raisonnable » sont inhérentes aux principes régissant la recherche de ces règles de choix collectif. Pour échapper au théorème d'Arrow, de multiples voies furent explorées (et le sont encore pour certaines d'entre elles) : par exemple définir des conditions sur les préférences des votants qui permettent d'appliquer la règle majoritaire en évitant l'« Effet Condorcet » (voir plus bas), ou ajuster le résultat fourni par la règle majoritaire selon le modèle souhaité (voir [Barthélemy et Monjardet, 1981 et 1988] ; d'autres voies sont présentées dans les articles de B. Monjardet [2003] et de N.-G. Andjiga et J. Moulen [2003] dans ce même numéro de *Mathématiques et Sciences humaines*).

### 3. INFLUENCE DU MODE DE SCRUTIN SUR LE RÉSULTAT D'UNE ÉLECTION

Afin d'illustrer certaines des méthodes évoquées plus haut et l'influence primordiale que peut exercer celui qui choisit le mode de scrutin, examinons l'exemple suivant (tiré de J.-P. Barthélemy *et alii*. [1989]). Supposons que 27 votants doivent se prononcer entre 4 candidats  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$  et supposons qu'ils aient classé les candidats conformément au profil suivant :

pour 5 votants,  $x > y > z > t$  ;  
 pour 4 votants,  $x > z > y > t$  ;  
 pour 2 votants,  $t > y > x > z$  ;  
 pour 6 votants,  $t > y > z > x$  ;  
 pour 8 votants,  $z > y > x > t$  ;  
 pour 2 votants,  $t > z > y > x$ .

#### 3.1. SCRUTIN UNINOMINAL À UN OU DEUX TOURS

Considérons un mode de scrutin à un tour (aussi appelé « règle de pluralité » dans la littérature du choix social, ou parfois « règle de majorité simple »), comme celui en vigueur à l'époque de Borda. Dans une telle élection, le candidat le plus souvent placé en tête par les votants est l'élu (avec une règle supplémentaire pour départager d'éventuels *ex æquo* ; ceci reste vrai pour les autres modes de scrutin). Dans notre exemple :

$x$  est placé en tête par  $5 + 4 = 9$  votants,  
 $y$  par 0 votant,  
 $z$  par 8 votants,  
 $t$  par 10 votants ;

donc ici :

$t$  est élu selon le mode de scrutin à un tour,

et on peut même classer les candidats selon l'ordre total  $t > x > z > y$ , que l'on peut considérer comme l'ordre de préférence collective des votants pour ce mode de scrutin.

Pourtant, suivant les critiques de Borda, on peut remarquer que  $5 + 4 + 8 = 17$  votants préféreraient voir  $x$  (qui vient juste derrière  $t$  dans l'ordre collectif précédent) élu plutôt que  $t$ . Autrement dit, s'il y avait un second tour opposant les deux candidats placés en tête lors du premier tour, c'est-à-dire ici  $x$  et  $t$ ,  $x$  arriverait le premier. C'est ce que fait un mode de scrutin à deux tours, actuellement utilisé en France pour les élections présidentielles par exemple. Par conséquent, dans notre exemple :

$x$  est élu selon le mode de scrutin à deux tours,

et non  $t$ , battu au second tour.

Malheureusement, ce scrutin à deux tours présente l'inconvénient d'éventuellement éliminer entre les deux tours un candidat qui, quoique moins bien placé au premier tour que chacun des deux candidats restant en lice, aurait pu être préféré par une majorité au vainqueur du second tour. On risque alors de voir se former une coalition majoritaire de votants mécontents qui préféreraient tous globalement un autre candidat que l'élu du second tour. Ainsi dans notre exemple, une confrontation entre  $x$  et  $y$  donnerait la victoire à ce dernier, puisque 18 votants préfèrent  $y$  à  $x$  ! De manière plus concrète, certains politologues estiment, à tort ou à raison, que cette situation a pu se produire lors des dernières élections présidentielles en France : la dispersion des voix de gauche et la montée de l'extrême droite ont évincé Lionel Jospin du premier tour, laissant Jacques Chirac et Jean-Marie Le Pen face à face au second tour et, comme on sait, c'est Jacques Chirac qui fut élu ; qui sait ce qu'eût été le résultat d'un second tour opposant Jacques Chirac et Lionel Jospin ?

On pourrait envisager de multiplier les tours de ce genre de scrutin. Par exemple en conservant les trois candidats arrivés en tête à l'issue du premier tour puis en leur appliquant un scrutin à deux tours. Hélas, quel que soit le nombre de tours, on pourrait encore construire des cas pour lesquels on observerait une coalition majoritaire de mécontents se former contre le candidat élu...

### 3.2. MÉTHODE DE BORDA

Fort de ces considérations, Borda a proposé une méthode<sup>11</sup> consistant, pour chaque votant, à ordonner les candidats par « ordre de mérite » puis à tenir compte des rangs occupés par les candidats dans un tel ordre : s'il y a  $n$  candidats ( $n = 4$  dans l'exemple ci-dessus), on attribue  $n$  points à un candidat placé en tête,  $n - 1$  points au candidat suivant (ici 3), et ainsi de suite en diminuant à chaque fois d'une unité le nombre de points attribués au candidat suivant, jusqu'au dernier à qui on attribue 1 point ; puis on fait la somme des points de chaque candidat, ce qui donne les *scores de Borda* des différents candidats. Pour l'exemple ci-dessus, on obtient les scores suivants :

<sup>11</sup> Dans son mémoire, Borda exposait deux méthodes : la première est celle illustrée ici ; la seconde propose d'effectuer des « élections particulières », opposant à chaque fois deux candidats, et d'attribuer à chaque candidat  $i$  une note égale à la somme des suffrages exprimés en faveur de  $i$  contre ses adversaires pris individuellement. En fait, cette méthode redonne le résultat de la précédente, puisqu'elle revient à décomposer les résultats en ordres totaux, un ordre étant associé à un votant ; la somme des suffrages redonne la somme des rangs (voir [D. Black, 1958]).

score de  $x = 5 \times 4 + 4 \times 4 + 2 \times 2 + 6 \times 1 + 8 \times 2 + 2 \times 1 = 64$   
 score de  $y = 75$   
 score de  $z = 74$   
 score de  $t = 57$

Le vainqueur est alors le candidat ayant le score le plus élevé (plus généralement, on peut construire une préférence collective pour le critère de Borda en triant les candidats selon les scores décroissants, avec d'éventuels *ex æquo*). Dans notre exemple :

le vainqueur de Borda est  $y$

et on peut considérer que la préférence collective est donnée par l'ordre  $y > z > x > t$  (préférence que l'on pourra comparer à celle obtenue par le mode de scrutin à un tour, à savoir  $t > x > z > y$ , pour constater que l'une est l'inverse de l'autre !). Mais ce résultat n'échappe pas à la critique précédente, puisque 14 votants sur 27, c'est-à-dire une majorité des votants, sont plus favorables à  $z$  qu'à  $y$  !...

### 3.3. RÈGLE MAJORITAIRE DE CONDORCET

Pour expliquer la règle majoritaire chère à Condorcet, appelons  $m_{ij}$  le nombre de votants préférant le candidat  $i$  au candidat  $j$ . Les quantités  $m_{ij}$  permettront de classer les candidats entre eux, en considérant que  $i$  est collectivement préféré à  $j$  si on a :  $m_{ij} > m_{ji}$  (on remarquera que la somme  $m_{ij} + m_{ji}$  n'est autre que le nombre de votants  $m$  ; par conséquent, si  $m$  est impair, on ne peut pas avoir d'*ex æquo*, lesquels sont caractérisés par l'égalité  $m_{ij} = m_{ji}$ ). Dans notre exemple, les quantités  $m_{ij}$  supérieures à la majorité  $m/2$  sont :

$$m_{xt} = 17, m_{yx} = 18, m_{yt} = 17, m_{zx} = 16, m_{zy} = 14, m_{zt} = 17.$$

Par conséquent :

$z$  est élu,

puisque'il est collectivement préféré à tous les autres (un tel candidat préféré à tout autre candidat par une majorité de votants s'appelle un *vainqueur de Condorcet*). En fait, on obtient ici un classement collectif qui est un ordre total :  $z > y > x > t$  (donc une préférence collective encore différente de celles obtenues plus haut<sup>12</sup>). Par conséquent, pas de coalition majoritaire de mécontents dans cet exemple : quel que soit le candidat opposé à  $z$ , il existe toujours une majorité de votants (qui n'est d'ailleurs pas toujours la même) qui s'accordent à voter en faveur de  $z$ .

Au passage, on remarquera que, tout en étant préféré à n'importe quel autre candidat par une majorité de votants,  $z$  n'a pas été élu par le mode de scrutin majoritaire à deux tours (ni d'ailleurs par celui à un tour, ni par la méthode de Borda). Ceci répond donc à une question posée dans l'introduction : dans une élection présidentielle française, un candidat préféré à tout autre candidat par une majorité de votants peut paradoxalement ne pas être élu et, réciproquement, l'élu peut très bien ne pas être un

<sup>12</sup> On pourrait facilement construire un autre exemple pour lequel l'ordre collectif obtenu par la méthode de Condorcet serait l'ordre inverse de celui obtenu par un mode de scrutin uninominal à un tour. Le lecteur intéressé pourra s'en convaincre par exemple à l'aide du profil suivant portant sur neuf votants et trois candidats : pour 4 votants,  $x > z > y$  ; pour 3 votants,  $y > z > x$  ; pour 2 votants,  $z > y > x$ . En revanche, une telle inversion ne peut pas se produire entre l'ordre total (quand c'en est un) obtenu par la méthode de Condorcet et l'ordre total (quand c'en est un) obtenu par la méthode de Borda ; plus précisément, un vainqueur de Condorcet ne peut pas être placé dernier par la méthode de Borda (voir par exemple l'article de V. Merlin [2003] dans ce numéro) ; de même, la méthode de Borda ne peut pas élire un *perdant de Condorcet*, c'est-à-dire un candidat qui ne serait jamais préféré à un autre candidat par une majorité de votants.

vainqueur de Condorcet même quand il en existe un (car on va voir maintenant qu'il peut ne pas en exister). Certains observateurs estiment que cette situation s'est produite par exemple lors des élections présidentielles françaises de 1988, avec Raymond Barre comme vainqueur de Condorcet, pourtant éliminé dès le premier tour au profit de François Mitterrand et de Jacques Chirac.

On pourrait donc penser qu'on tient là enfin un bon mode de scrutin. En fait, il n'est pas exempt d'inconvénients, comme Condorcet le découvrit lui-même, à cause de ce qui a été appelé « paradoxe du vote » ou « Effet Condorcet » (G. Th. Guilbaud [1952]) : l'agrégation d'ordres totaux (les classements individuels) par cette méthode de Condorcet ne donne pas toujours un ordre total (que l'on pourrait sinon considérer comme le classement collectif). En effet, la relation finale à laquelle la méthode de Condorcet conduit (relation induite par les comparaisons entre  $m_{ij}$  et  $m_{ji}$ ) n'est pas nécessairement transitive : on peut alors se trouver dans la situation paradoxale où un candidat est collectivement préféré à un deuxième, lequel est collectivement préféré à un troisième, lui-même collectivement préféré au premier ! Il est difficile dans ces conditions de déterminer un vainqueur... Ce phénomène est illustré par l'exemple suivant, extrait des œuvres de Condorcet [1785] ; il fait intervenir 3 candidats  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et 60 votants (une illustration minimum ne ferait intervenir que 3 candidats et 3 votants) :

pour 23 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 17 votants :  $y > z > x$  ;  
 pour 2 votants :  $y > x > z$  ;  
 pour 10 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 8 votants :  $z > y > x$ .

Les nombres  $m_{ij}$  valent alors :

$$m_{xy} = 33, m_{xz} = 25, m_{yx} = 27, m_{yz} = 42, m_{zx} = 35, m_{zy} = 18.$$

D'après ces valeurs,  $x$  devrait être collectivement préféré à  $y$ ,  $y$  à  $z$ , et  $z$  à  $x$  ! D'une façon générale, si on dispose d'un critère pour résoudre les cas d'égalité ( $m_{ij} = m_{ji}$ ), la méthode de Condorcet permet bien de choisir un candidat et un seul pour toute paire de candidats  $\{i, j\}$ , mais peut fréquemment conduire à une relation qui ne soit pas transitive : pour trois candidats, la probabilité de l'apparition de l'Effet Condorcet<sup>13</sup> varie de 5,56 % (pour trois votants) à environ 8,77 % (pour un nombre de votants qui tend vers l'infini) (voir [G. Th. Guilbaud, 1952]). Elle croît avec le nombre de candidats, et, à nombre de candidats fixé, elle croît quand le nombre de votants augmente. Par exemple, d'après W. Gehrlein [1997], elle vaut environ 52,5 % pour 25 candidats et 3 votants, pour atteindre environ 73 % pour 25 candidats et une infinité de votants.<sup>14</sup>

On le constate donc sur cet exemple : le choix du mode de scrutin est loin d'être négligeable. Dans notre exemple, chacun des quatre candidats peut prétendre être élu, puisque chacun d'eux est choisi par une des quatre méthodes présentées plus haut...

Or, si l'on accepte le résultat d'une élection effectuée dans un cadre démocratique, c'est entre autres parce que l'on estime que celui-ci traduit intrinsèquement les préférences des votants, préjugé que relevait déjà Borda (cité dans J. Mascart [1919]) :

<sup>13</sup> Ces résultats sont obtenus dans le contexte qualifié de *culture neutre* (*impartial culture* en anglais) : la préférence de chaque votant est tirée aléatoirement avec une distribution uniforme sur tous les ordres possibles et les préférences des votants sont choisies indépendamment les unes des autres. D'autres contextes sont parfois considérés. Le lecteur désireux d'approfondir la question pourra se reporter à l'article de R. May [1971] ou celui, plus récent, de S. Berg et D. Lepelley [1992], ainsi qu'à la synthèse de W. Gehrlein [2002] ; on y trouvera aussi des calculs relatifs à l'apparition d'autres paradoxes.

*« C'est une opinion généralement reçue, et contre laquelle je ne sache pas qu'on ait jamais fait d'objection, que dans une élection au scrutin, la pluralité des voix indique toujours le vœu des électeurs, c'est-à-dire que le candidat qui a obtenu cette pluralité est nécessairement celui que les électeurs préfèrent à ses concurrents. Mais ... cette opinion, qui est vraie dans le cas où l'élection se fait entre deux sujets seulement, peut induire en erreur dans tous les autres cas ».*

L'exemple précédent le montre : le résultat d'une élection n'est pas le reflet intrinsèque des préférences des votants, mais dépend aussi, et parfois grandement, du mode de scrutin retenu.

#### 4. EXEMPLES D'EFFETS PARADOXAUX

Plusieurs des effets paradoxaux décrits ci-dessous résultent de l'absence de monotonie des procédures envisagées, mais pas tous. Le scrutin uninominal à un tour, dont il va être question maintenant, est évidemment monotone (on verra que ce n'est déjà plus le cas pour le mode de scrutin uninominal à deux tours comme celui adopté pour les élections présidentielles en France). La remarque suivante portera donc sur un paradoxe d'une autre nature, illustrant le décalage qui peut exister entre la représentativité d'un parti politique dans une population et celle du même parti dans une assemblée élue par cette population. Il subsistera, sous une forme atténuée, quand nous parlerons du scrutin uninominal à deux tours.

##### 4.1. *Scrutin uninominal à un tour*

Imaginons un pays découpé en circonscriptions et possédant une assemblée dont les membres, appartenant à des partis politiques, sont élus à l'aide d'un scrutin uninominal à un tour, à raison d'un membre par circonscription. Est-il possible qu'un parti  $P$  donné soit majoritaire dans cette assemblée tout en étant minoritaire par rapport aux votants ? Si oui, quelle doit être sa représentativité minimum dans la population pour qu'il en soit ainsi ? De même, quelle est la part maximum de sièges qu'il peut occuper dans l'assemblée ?

Il est facile de constater que, d'un point de vue théorique, il n'y a pas de seuil minimum à respecter pour la représentativité de ce parti dans la population pour qu'il puisse occuper tous les sièges de l'assemblée, si l'on peut faire intervenir autant de partis que l'on veut. En effet, pour que tous les membres de l'assemblée appartiennent à  $P$ , il

---

<sup>14</sup> Encore convient-il de distinguer entre trois cas : il se peut que l'Effet Condorcet n'implique pas tous les candidats et permette de dégager un vainqueur de Condorcet ; si on ne cherche à élire qu'une seule personne, cette situation n'est pas gênante. À défaut, il se peut qu'on puisse regrouper les candidats en sous-ensembles de telle sorte que tous les candidats d'un sous-ensemble soient préférés à tous ceux d'un autre sous-ensemble ; le problème est alors de savoir comment ordonner les candidats d'un même sous-ensemble. Enfin le cas le plus embarrassant est celui où l'Effet Condorcet porte sur tous les candidats à la fois et ne permet aucune conclusion, même partielle, quant à la préférence collective. Dans le cas de 6 candidats et 21 votants, F. Mimiague et J.-M. Rousseau [1973] ont estimé expérimentalement que la probabilité pour que le résultat de la procédure donne un « paradoxe » du premier type vaut environ 35 %, du second type 20 %, et du troisième type 10 %. Selon ces auteurs, quand les nombres de candidats et de votants croissent, les deux derniers cas (absence de vainqueur de Condorcet) deviennent prépondérants et le premier cas disparaît (on notera cependant de significatives différences entre les valeurs avancées par ces auteurs et celles obtenues par W. Gehrlein).

faut et il suffit que  $P$  arrive en tête dans chaque circonscription. Or, ceci peut se produire avec une représentativité de  $P$  aussi faible qu'on veut : il suffit de supposer qu'il existe un suffisamment grand nombre de concurrents et que chacun de ceux-ci soit moins bien placé que le candidat de  $P$ . Par exemple,  $P$  peut représenter moins de 10 % de la population et obtenir tous les sièges si on suppose qu'au moins onze partis (dont  $P$ ) présentent des candidats dans chaque circonscription et que chaque parti autre que  $P$  obtient par exemple 9,05 % des suffrages alors que  $P$  en obtient 9,5 %. Le résultat général est cependant peu réaliste car il suppose le nombre de partis en présence non majoré par une constante (pour que le raisonnement soit applicable, le nombre de partis doit être d'autant plus grand que le seuil qu'on s'impose est plus petit).

#### 4.2. *Scrutin uninominal à deux tours*

Le résultat précédent reste valable pour une élection à deux tours si on suppose que le report des voix entre le premier tour et le second s'opère en faveur de  $P$ , du moins majoritairement. Il est plus intéressant de savoir si une situation analogue peut se produire par rapport aux électeurs votant au second tour (ce qui revient à poser la même question pour un scrutin à un tour, mais en limitant à 2 le nombre de partis en présence).

Dans ce cas, pour avoir tous les sièges de l'assemblée, le parti  $P$  doit remporter le second tour dans toutes les circonscriptions, ce qui implique qu'il obtienne la majorité absolue dans chaque circonscription, ce qui suppose que  $P$  soit majoritaire dans la population des votants. Mais, réciproquement, il suffit que  $P$  représente plus de 50 % des votants du second tour pour gagner tous les sièges de l'assemblée (ce qui ne manquerait pas de provoquer des protestations chez les opposants de  $P$ ), si les votants favorables (au second tour) à  $P$  sont uniformément répartis dans les circonscriptions.

Qu'en est-il maintenant si  $P$  ne cherche pas à avoir nécessairement tous les sièges, mais veut seulement être majoritaire à l'assemblée ? Est-il possible de contrôler une assemblée comme l'Assemblée nationale en France en étant minoritaire (par rapport aux suffrages exprimés au second tour) dans le pays ? La réponse est « oui ». Il suffit en effet que  $P$  gagne les élections dans la moitié des circonscriptions plus une pour avoir la majorité absolue. Mais comme les circonscriptions ne comptent pas nécessairement le même nombre de votants,  $P$  peut représenter moins de la moitié de la population et avoir néanmoins plus de la moitié des sièges.

On peut rendre plus fort ce paradoxe en supposant désormais que les circonscriptions regroupent exactement le même nombre de votants. Cela n'invalide pas le résultat, mais rend plus subtile son obtention. Regroupons pour cela les circonscriptions en deux catégories : celles pour lesquelles  $P$  gagne le second tour et celles pour lesquelles  $P$  les perd. Pour que  $P$  puisse avoir au moins la moitié des sièges plus un à l'assemblée, le premier type doit regrouper au moins la moitié des circonscriptions plus une. Or, pour gagner une circonscription,  $P$  doit représenter plus de 50 % des votants du second tour de cette circonscription. En revanche, dans le second cas (circonscription perdue pour  $P$ ), la représentativité de  $P$  peut être nulle. Dans ces cas extrêmes ( $P$  représente juste un peu plus de la moitié des votants dans les circonscriptions qu'il gagne et personne dans celles qu'il perd),  $P$  représente environ la moitié des votants dans environ la moitié des circonscriptions, soit au total environ le quart des votants (puisque l'on a supposé que les circonscriptions ont toutes le même nombre de votants). On peut donc, même avec des circonscriptions de taille identique, avoir la moitié des sièges de l'assemblée en ne représentant qu'un peu plus de 25 % des votants. Bien sûr, la répartition des votants dans les circonscriptions joue alors un rôle primordial : il faut pour cela découper ces dernières de façon à regrouper au maximum les opposants à  $P$  dans des circonscriptions « sacrifiées » et répartir au contraire les

votants favorables à  $P$  dans les autres circonscriptions pour qu'ils représentent au moins la moitié des votants. On notera que la France a déjà connu pour certaines circonscriptions, au cours de son histoire électorale, ce genre de découpage étonnant, que l'opposition (de quelque bord qu'elle soit) qualifie alors de « charcutage » ou de « tripatouillage »<sup>15</sup>.

Abordons maintenant la question de la monotonie du scrutin à deux tours. Pour cela, appliquons ce scrutin à une élection impliquant 3 candidats  $x, y, z$  et 17 votants dont les préférences sont données par le profil d'ordres totaux suivant :

pour 6 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 5 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 4 votants :  $y > z > x$  ;  
 pour 2 votants :  $y > x > z$ .

Par conséquent  $x$  et  $y$ , qui recueillent chacun 6 voix au premier tour contre 5 pour  $z$ , restent en lice pour le second tour. Les préférences étant supposées stables, les 12 votants ayant voté pour  $x$  ou pour  $y$  au premier tour maintiennent leur vote au second, tandis que les 5 électeurs ayant voté pour  $z$  se prononcent en faveur de leur second choix, c'est-à-dire  $x$ . C'est donc  $x$  qui est élu au second tour contre  $y$ , avec 11 voix contre 6.

Imaginons maintenant que  $x$ , le vainqueur, ignorant l'issue du vote, fasse campagne contre son rival  $y$  et parvienne à convaincre les deux derniers votants (ceux dont les préférences étaient données par  $y > x > z$ ) d'invertir  $x$  et  $y$  dans leurs choix. On obtient donc les nouvelles répartitions suivantes entre votants :

pour 8 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 5 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 4 votants :  $y > z > x$ .

Ce sont maintenant  $x$  et  $z$  qui restent en lice au second tour. Les électeurs de  $y$  reportent leurs voix sur leur second choix, c'est-à-dire  $z$ . Celui-ci bénéficie donc au total de  $5 + 4 = 9$  voix au second tour, battant ainsi  $x$  qui n'en a que 8 :  $z$  est donc désormais le vainqueur.

Et pourtant  $x$  progresse dans les places que lui attribuent les votants par rapport à la situation initiale. On pourrait donc s'attendre à ce que  $x$  reste vainqueur. C'est du moins ce qui devrait se passer si le mode de scrutin à deux tours était monotone ; mais justement, il ne l'est pas ! Ici,  $x$  se retrouve bien au second tour (il ne pourrait en être autrement), mais maintenant  $y$  ne recueille plus assez de voix pour se maintenir contre  $x$  et est donc éliminé au profit de  $z$ . C'est ce changement d'adversaire qui explique la défaite de  $x$ . Conclusion : bien que  $x$  progresse dans les préférences des votants, cette progression lui nuit *in fine* et le fait passer de l'état de vainqueur à celui de vaincu.

Une conséquence de cette absence de monotonie concerne ce qui a parfois été appelé « le vote utile ». Dans une telle situation, un votant accepte de ne pas voter pour son candidat préféré, par exemple parce qu'il estime que ce dernier n'a pas suffisamment de chances d'être présent au second tour, et reporte sa voix sur son second choix, considéré comme ayant plus de chances de gagner (mais néanmoins menacé d'élimination pour que ce « vote utile » soit justifié aux yeux de l'électeur qui envisage de manipuler son vote). Ainsi lors de l'élection présidentielle de 2002, Lionel Jospin a incontestablement souffert d'une dispersion des voix de gauche, et l'on peut facilement imaginer qu'un « vote utile » aurait pu lui permettre de participer au second tour. On a en revanche plus de difficultés à concevoir que ce même « vote utile » puisse nuire à celui

<sup>15</sup> On trouvera un point sur la situation actuelle en France dans M. Baïou et M. Balinski [2002].

qui croit en bénéficiant. C'est pourtant ce qu'illustre l'exemple précédent, en montrant comment le « vote utile » appliqué par les deux derniers électeurs en faveur de  $x$  fait perdre ce dernier. Par exemple, toujours pour l'élection présidentielle de 2002, que se serait-il passé si la campagne de Jacques Chirac avait convaincu certains des électeurs de Jean-Marie Le Pen à voter pour lui ? Si les transferts de voix de Jean-Marie Le Pen vers Jacques Chirac avaient été suffisamment nombreux, peut-être le second tour aurait-il vu un affrontement entre Jacques Chirac et Lionel Jospin, avec une issue qu'on ignore, mais qui aurait pu illustrer la nuisance potentielle du « vote utile »...

Une autre conséquence, elle aussi paradoxale, est qu'un votant peut avoir intérêt à voter pour le candidat qu'il aime le moins pour finalement aider son candidat préféré à gagner. Considérons ainsi l'exemple suivant, là encore avec 3 candidats  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et 17 votants :

pour 6 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 2 votants :  $x > z > y$  ;  
 pour 5 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 4 votants :  $y > z > x$ .

Dans cette situation,  $x$  et  $z$  se retrouvent au second tour et, grâce aux électeurs de  $y$ , c'est  $z$  qui gagne. Si maintenant les deux votants dont les préférences sont données par l'ordre total  $x > z > y$  ne votent pas selon leurs préférences et décident de voter pour le candidat qu'ils aiment le moins (ce n'est donc plus un vote qualifié de sincère), c'est-à-dire  $y$ , alors  $x$  (avec 6 voix) et  $y$  (avec 6 voix aussi) se retrouvent au second tour, au détriment de  $z$  (qui n'a que 5 voix). Grâce à l'apport des électeurs de  $z$  et indépendamment de l'attitude des deux électeurs au vote non sincère,  $x$  gagne alors le second tour contre  $y$ . On le voit ici, le comportement machiavélique des deux électeurs les a amenés à voter pour  $y$ , en fait avec comme objectif d'éliminer  $z$ , candidat qu'ils accepteraient plus volontiers que  $y$ , mais qui menace davantage leur candidat favori  $x$ . Pour en revenir une dernière fois aux élections de 2002, j'ignore si certains électeurs de Jacques Chirac, éventuellement farouches opposants aux idées d'extrême droite défendues par Jean-Marie Le Pen, ont voté pour ce dernier afin de faire barrage à Lionel Jospin ; mais, d'un point de vue purement stratégique, s'il y en eut, ils n'eurent pas nécessairement tort d'agir ainsi... Bien évidemment cette stratégie présente des risques et, si on suppose que, dans notre exemple, les électeurs de  $z$  préfèrent tous  $y$  à  $x$ , alors nos deux électeurs manipulateurs de leurs votes auraient échoué dans leur manœuvre, contribuant même à élire  $y$  plutôt que  $z$ , candidat qu'ils auraient pourtant préféré à  $y$ .

Pour terminer cette partie<sup>16</sup>, évoquons ce que D. Bouyssou et P. Perny [1997] (à qui j'emprunte l'exemple suivant) appellent plaisamment le *paradoxe du pêcheur à la ligne* et qui est en fait un paradoxe de l'abstention (il en sera question aussi dans la partie suivante). Imaginons pour cela qu'une élection a lieu entre trois candidats  $x$ ,  $y$  et  $z$  que doivent départager onze votants répartis de la manière suivante :

pour 4 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 4 votants :  $z > y > x$  ;  
 pour 3 votants :  $y > z > x$ .

Si nos onze électeurs votaient, le premier tour éliminerait  $y$  et le second tour, compte tenu du report des voix des trois derniers électeurs, donnerait  $z$  vainqueur, avec sept voix contre seulement quatre pour  $x$ . Mais, subodorant le résultat, deux des quatre premiers électeurs, dégoûtés par la victoire attendue de  $z$ , qu'ils ne peuvent pourtant placer moins

<sup>16</sup> On verra à la fin de la partie suivante (IV.3.) une illustration d'un autre paradoxe dont n'est pas exempt le mode de scrutin uninominal majoritaire à deux tours.

bien dans leurs préférences, décident de s'abstenir et d'aller à la pêche plutôt que de remplir leur devoir électoral. Mais alors,  $x$  n'ayant plus que deux voix, c'est lui qui est éliminé au premier tour ;  $y$  et  $z$  s'affrontent donc au second tour, au profit de  $y$ , qui bénéficie du report des voix des deux (ou des quatre si on suppose que les deux abstentionnistes sont revenus de leur pêche et participent au second tour) premiers votants restants : c'est donc finalement  $y$  qui est élu. À l'issue du second tour, nos deux pêcheurs ont donc la satisfaction de constater que leur abstention, non seulement leur a permis de passer une belle journée à la campagne, mais surtout a contribué à faire élire un candidat ( $y$ ) qui a davantage leur préférence que celui qui aurait été élu s'ils avaient voté ( $z$ ). Et D. Bouyssou et P. Perny de conclure qu'un tel mode de scrutin n'incite pas à la participation, puisqu'on peut avoir intérêt à s'abstenir plutôt que de voter sincèrement. Un message peut-être à méditer quand on entend les divers observateurs commenter les faibles taux de participation aux dernières élections françaises, se demandant comment remotiver l'électorat : faut-il en outre adopter un autre mode de scrutin ?<sup>17</sup>

#### 4.3. Votes par éliminations successives

On l'a vu plus haut, la méthode de Condorcet, fondée sur les comparaisons par paires, peut ne pas donner un ordre total, même si les préférences des votants sont des ordres totaux sur l'ensemble des candidats. Une façon de résoudre le problème consiste à comparer les candidats selon un ordre fixé à l'avance (que nous appellerons *ordre d'élimination* et qui peut être aléatoire ou choisi selon divers critères, plus ou moins pertinents) : par exemple, si on décide d'examiner les  $n$  candidats  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) dans l'ordre induit par les indices, on compare d'abord  $x_1$  et  $x_2$ , puis le vainqueur de cette comparaison et  $x_3$ , puis le vainqueur de cette nouvelle comparaison et  $x_4$ , et ainsi de suite. Bien sûr, cette façon de procéder n'est pas *a priori* équitable (ainsi  $x_1$  et  $x_2$  ne peuvent être vainqueurs que s'ils sont l'un ou l'autre vainqueur de Condorcet, alors que tout autre candidat peut espérer être élu même s'il n'est pas préféré à tous les autres dès lors que tous les autres candidats ne lui sont pas majoritairement préférés), et celui qui peut choisir l'ordre d'élimination détient un pouvoir important. Mais, à ce choix arbitraire près, la méthode ne semble pas déraisonnable, en particulier si on choisit « honnêtement » l'ordre d'élimination (on peut atténuer le caractère arbitraire en choisissant par exemple l'ordre d'élimination au hasard, avec une distribution de probabilité uniforme, ou encore en essayant plusieurs ordres pour une même élection ; reste alors à savoir, dans ce dernier cas, comment choisir l'heureux élu si les ordres retenus ne sélectionnent pas tous un même vainqueur).

Et pourtant elle va nous permettre d'illustrer deux effets paradoxaux, en commençant par un résultat qui montre de nouveau que, dans certains cas, il vaut mieux s'abstenir de voter ! Examinons pour cela l'exemple suivant<sup>18</sup>, dans lequel sept votants doivent choisir entre quatre candidats  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , en supposant que les préférences individuelles sont données de la façon suivante :

<sup>17</sup> Signalons à cet égard l'étude menée par J.-F. Laslier et K. Van der Straeten pendant le premier tour de l'élection présidentielle de 2002, consistant à appliquer, à titre expérimental, un autre mode de scrutin, appelé *vote par approbation* ou *vote par assentiment*, dans cinq bureaux de vote à Orsay (Essonne) et dans celui de Gy-les-Nonains (Loiret). On pourra trouver un bilan de cette expérience dans J.-F. Laslier et K. Van der Straeten [2003].

<sup>18</sup> Exemple que m'a indiqué B. Monjardet, communication personnelle. Il s'agit d'une variante d'un exemple figurant dans H. Moulin [1988].

pour 1 votant :  $z > y > x > t$  ;  
 pour 3 votants :  $x > t > y > z$  ;  
 pour 1 votant :  $z > x > t > y$  ;  
 pour 2 votants :  $y > z > t > x$  .

Supposons de plus que les candidats soient comparés dans l'ordre d'élimination suivant : d'abord  $x$  et  $y$ , puis le vainqueur de cette comparaison et  $z$ , enfin le vainqueur de cette nouvelle comparaison et  $t$ . On obtient les résultats suivants :

$x$  contre  $y$  :  $x$  vainqueur, car 4 votants préfèrent  $x$  à  $y$  et seulement 3 préfèrent  $y$  à  $x$  ;  
 $x$  contre  $z$  :  $z$  vainqueur, car 4 votants préfèrent  $z$  à  $x$  et seulement 3 préfèrent  $x$  à  $z$  ;  
 $z$  contre  $t$  :  $z$  vainqueur, car 4 votants préfèrent  $z$  à  $t$  et seulement 3 préfèrent  $t$  à  $z$  .

Par conséquent,  $z$  est ici le vainqueur<sup>19</sup>.

Imaginons maintenant que 2 votants supplémentaires se joignent aux 7 précédents, avec la même préférence que le premier votant, c'est-à-dire en particulier avec  $z$ , vainqueur de l'élection précédente, comme champion. On pourrait donc s'attendre à voir  $z$  conforté dans sa place de vainqueur, du moins si on garde le même ordre d'élimination. Et pourtant, nous avons maintenant comme préférences :

pour 3 votants :  $z > y > x > t$  ;  
 pour 3 votants :  $x > t > y > z$  ;  
 pour 1 votant :  $z > x > t > y$  ;  
 pour 2 votants :  $y > z > t > x$  .

En conservant le même ordre que ci-dessus, on obtient désormais les résultats suivants :

$x$  contre  $y$  :  $y$  vainqueur, car 5 votants préfèrent  $y$  à  $x$  et seulement 4 préfèrent  $x$  à  $y$  ;  
 $y$  contre  $z$  :  $y$  vainqueur, car 5 votants préfèrent  $y$  à  $z$  et seulement 4 préfèrent  $z$  à  $y$  ;  
 $y$  contre  $t$  :  $y$  vainqueur, car 5 votants préfèrent  $y$  à  $t$  et seulement 4 préfèrent  $t$  à  $y$  .

C'est donc  $y$  le nouveau vainqueur ( $y$  est en fait un vainqueur de Condorcet), et non plus  $z$ , bien que les deux nouveaux votants placent  $z$  en tête de leurs préférences ! Dans cet exemple, les deux nouveaux votants, partisans de  $z$ , auraient mieux fait de s'abstenir : cela aurait permis de faire élire  $z$  !...

Cet exemple illustre ce qui, dans sa version initiale, s'appelle le *paradoxe des jumeaux* (même si, dans l'exemple, il s'agit plutôt de triplés) : reproduire les préférences d'un votant (le premier dans l'exemple) qui place le vainqueur ( $z$  dans l'exemple) en tête peut conduire à faire perdre ce vainqueur. Simultanément, il illustre aussi ce qu'on pourrait appeler le *paradoxe de l'abstention* (*no show paradox* dans la terminologie anglo-saxonne proposée par S. Brams et P. Fishburn [1983]) : il y a des cas où il vaut mieux s'abstenir que de faire connaître ses préférences. D'une façon plus générale, H. Moulin [1988] a démontré qu'il est impossible d'éviter systématiquement ce paradoxe de l'abstention dès lors qu'on applique une procédure qui sélectionne le vainqueur de Condorcet (s'il existe) à une élection où figurent au moins quatre candidats. On devra donc s'exposer soit à ce paradoxe, soit à l'éventuel rejet d'un vainqueur de Condorcet...

Un autre paradoxe affecte cette façon de procéder, mettant en défaut le principe d'unanimité (aussi appelé *principe de Pareto*). Celui-ci stipule que si un candidat  $i$  est préféré à un autre candidat  $j$  par tous les votants (nous dirons alors que  $j$  est *unanimentement dominé* par  $i$ ), alors il doit en être de même de la préférence collective.

<sup>19</sup> Remarquons qu'en choisissant un autre ordre pour les comparaisons, on pourrait faire en sorte que n'importe quel candidat soit vainqueur. Mais là n'est pas la question qui nous intéresse ici.

Selon ce principe, un tel candidat  $j$  ne devrait pas être vainqueur, puisque  $i$  devrait toujours lui être préféré, et ce, avec l'approbation de tout le monde. L'exemple suivant<sup>20</sup> montre que le procédé de comparaison avec éliminations successives mis en œuvre ici ne respecte pas le principe d'unanimité. Il fait intervenir de nouveau quatre candidats  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $t$ , et trois votants dont les préférences sont :

pour 1 votant :  $x > y > t > z$  ;  
 pour 1 votant :  $y > t > z > x$  ;  
 pour 1 votant :  $z > x > y > t$ .

Dans cet exemple, on constate que tous les votants sont d'accord pour préférer  $y$  à  $t$  :  $t$  est unanimement dominé par  $y$ . Supposons que l'on compare les candidats dans le même ordre que précédemment. On obtient :

$x$  contre  $y$  :  $x$  vainqueur, car 2 votants préfèrent  $x$  à  $y$  et seulement 1 préfère  $y$  à  $x$  ;  
 $x$  contre  $z$  :  $z$  vainqueur, car 2 votants préfèrent  $z$  à  $x$  et seulement 1 préfère  $x$  à  $z$  ;  
 $z$  contre  $t$  :  $t$  vainqueur, car 2 votants préfèrent  $t$  à  $z$  et seulement 1 préfère  $z$  à  $t$ .

C'est donc  $t$  qui doit être déclaré vainqueur, bien qu'il soit unanimement dominé par  $y$ ...

On pourrait penser que cette situation dérangeante provient d'un mauvais choix de l'ordre d'élimination et qu'un tel ordre est exceptionnel. Ce n'est pas le cas, comme l'a montré P. Fishburn [1974] : il existe des profils de préférences, avec trois votants et un nombre variable de candidats, présentant de telles situations ne respectant pas le principe d'unanimité pour presque tous les ordres d'élimination. Autrement dit, si on choisit l'ordre d'élimination au hasard avec une distribution uniforme, on observera ce paradoxe presque sûrement pour les profils décrits par P. Fishburn. Mais on peut se rassurer en constatant que ces profils ont une structure très particulière et ne correspondent pas forcément à ce que l'on observerait dans une « vraie » élection<sup>21</sup>...

Une autre façon d'éliminer successivement les candidats consiste à appliquer un scrutin uninominal à un tour, à éliminer le candidat recueillant le moins de voix et à recommencer (en supposant bien sûr que les électeurs ayant voté pour le candidat éliminé reportent leurs voix sur leur second choix), jusqu'à ce qu'il ne subsiste qu'un seul candidat : le vainqueur. Le dernier paradoxe que nous allons illustrer dans cette partie apparaît lorsqu'on applique cette procédure à des collèges électoraux<sup>22</sup>.

Pour cela, supposons (voir [D. Saari, 1994]) que 26 votants se répartissent en deux collèges de 13 électeurs chacun pour choisir un vainqueur parmi trois candidats  $x$ ,  $y$  et  $z$ , avec les profils suivants (identiques pour les 10 premiers membres de chaque collège) :

1<sup>er</sup> collège : pour 4 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 3 votants :  $y > x > z$  ;  
 pour 3 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 3 votants :  $z > y > x$ .

<sup>20</sup> Ce paradoxe figure déjà dans F. Harary *et alii.* [1965] mais non de manière explicite. La première mention explicite semble être dans P. Fishburn [1970].

<sup>21</sup> Selon une simulation faite par P. Fishburn [1974] portant sur 12000 profils aléatoires (culture neutre), la présence d'un vainqueur unanimement dominé est rare : elle n'a été obtenue qu'une seule fois sur les 12000 essais.

<sup>22</sup> Pour trois candidats, il n'y a pas de différence entre cette procédure d'élimination et le scrutin majoritaire à deux tours. Le paradoxe décrit ici peut donc aussi s'appliquer à ce dernier scrutin (en principe pour trois candidats, mais il n'est pas difficile ensuite de généraliser à un nombre quelconque de candidats).

2<sup>nd</sup> collège : pour 4 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 3 votants :  $y > x > z$  ;  
 pour 3 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 3 votants :  $y > z > x$ .

Quand le premier collège s'exprime,  $y$  est d'abord éliminé (seulement 3 voix en sa faveur, contre 4 pour  $x$  et 6 pour  $z$ ) puis  $z$  (avec seulement 6 voix contre 7 pour  $x$  qui bénéficie du report de voix des 3 électeurs de  $y$ ) ; la préférence du premier collège peut être résumée ici par l'ordre total  $x > z > y$ , qui admet  $x$  comme vainqueur. Pour le second collège, les résultats sont de même :  $z$  d'abord éliminé puis  $y$  ( $x$  bénéficiant cette fois des reports de voix des électeurs de  $z$ ) et la préférence du second collège peut être résumée par l'ordre  $x > y > z$ , qui admet aussi  $x$  comme vainqueur. Les deux collèges semblent donc d'accord pour élire  $x$  plutôt que  $y$  ou  $z$ .

Et pourtant, si on décide de réunir les deux collèges en un seul, on obtient comme profil la réunion des deux profils précédents, soit :

pour 8 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 6 votants :  $y > x > z$  ;  
 pour 6 votants :  $z > x > y$  ;  
 pour 3 votants :  $z > y > x$  ;  
 pour 3 votants :  $y > z > x$ .

Maintenant  $x$  est éliminé dès le premier tour, avec seulement 8 voix contre 9 pour  $y$  et autant pour  $z$  et, en poursuivant le processus, on obtient l'ordre total  $y > z > x$  comme préférence collective : de premier pour chaque collège,  $x$  est passé dernier.

#### 4.3. Méthode de Borda

Il est facile de voir que la méthode de Borda décrite plus haut est monotone : si un vainqueur de Borda progresse dans les préférences des votants, il obtient plus de points et reste donc vainqueur. Mais envisageons une variante de la méthode de Borda parfois employée lorsqu'il y a plus d'une personne à élire et appelée *méthode de Borda itérée*. Comme son nom l'indique, elle consiste à appliquer une première fois la méthode de Borda classique pour déterminer un premier élu ; puis on supprime celui-ci de la liste des candidats et on recommence, autant de fois qu'il y a de sièges à pourvoir. L'exemple suivant montre que la méthode de Borda itérée n'est pas monotone, ce qui montre à son tour que la monotonie ne se conserve pas si facilement que ce que l'on pourrait penser, puisque répéter une méthode monotone comme on vient de le décrire ne conduit pas nécessairement à une méthode monotone.

Considérons une assemblée de vingt électeurs devant choisir deux candidats parmi trois. Supposons que les préférences des vingt votants pour les trois candidats  $x$ ,  $y$  et  $z$  se répartissent comme suit :

pour 4 votants :  $x > y > z$  ;  
 pour 4 votants :  $y > z > x$  ;  
 pour 5 votants :  $y > x > z$  ;  
 pour 7 votants :  $z > x > y$ .

Les scores des candidats sont les suivants :

score de  $x = 40$ , score de  $y = 42$ , score de  $z = 38$ .

Par conséquent,  $y$  est élu premier. On supprime donc  $y$  des candidats, ce qui donne alors 9 votants qui préfèrent  $x$  à  $z$ , et donc 11 qui préfèrent  $z$  à  $x$ , soit un score de 31 pour  $z$  et de 29 pour  $x$  :  $z$  est élu second.

Supposons maintenant que les 5 votants dont les préférences sont  $y > x > z$  décident d'invertir  $x$  et  $z$ . Comme  $x$  n'était pas élu, on peut s'attendre à ce que cette régression n'arrange pas son cas ; et pourtant... Les scores deviennent :

$$\text{score de } x = 35, \text{ score de } y = 42, \text{ score de } z = 43.$$

Comme on pouvait s'y attendre,  $x$  régresse et voit son score diminuer, tandis que celui de  $y$  ne change pas. Mais, la somme des scores étant constante (elle vaut ici 120 quand il y a trois candidats et 60 quand il n'y en a que deux), la diminution du score de  $x$  s'accompagne d'une augmentation de celui de  $z$ , ce qui permet à celui-ci d'être élu premier. De ce fait, la seconde confrontation oppose maintenant  $x$  et  $y$ . Or, après avoir retiré  $z$  des candidats, on obtient 11 votants qui préfèrent  $x$  à  $y$  et donc 9 qui préfèrent  $y$  à  $x$  (soit un score de 31 pour  $x$  et de 29 pour  $y$ ) :  $x$  est élu second. Nous sommes donc dans une situation doublement paradoxale : non seulement  $x$ , moins bien placé qu'avant, est désormais élu, mais en plus  $y$ , dont la place ne change pour aucun votant et qui était élu premier avant ces modifications,  $y$  donc se trouve maintenant éliminé des élus !

Cet exemple, issu d'une communication de P. Perny et X. Juret [2001], peut facilement être adapté pour montrer comment la progression d'un candidat peut entraîner son élimination : il suffit de reprendre l'exemple précédent et d'invertir les deux cas (on passe alors de  $z$  et  $x$  élus à  $y$  et  $z$  élus après la progression de  $x$  dans l'opinion des 5 votants ; on s'étonnera alors de l'élimination de  $x$  et de la fulgurante progression de  $y$ , propulsé à la première place au lieu d'être éliminé). En fait, le contexte original de la situation décrite par P. Perny et X. Juret concernait un concours à trois candidats ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ) et deux places, avec quatre épreuves (français, anglais, mathématiques et physique) pourvues de coefficients (respectivement 0,2, 0,2, 0,35 et 0,25 ; en multipliant ceux-ci par 20, on reconnaîtra aisément les nombres de votants ci-dessus). Dans un premier temps, les notes obtenues par les candidats sont les suivantes :

	Français	Anglais	Mathématiques	Physique
	0,2	0,2	0,35	0,25
$x$	15	5	10	10
$y$	10	15	5	15
$z$	5	10	15	5

Alors, en considérant que chaque épreuve définit un ordre sur les candidats et en agrégeant ces ordres avec des poids proportionnels aux coefficients, on retrouve la première situation décrite plus haut :  $y$  est premier du concours et  $z$  est second. Dans un second temps, la note de physique de  $x$  passe de 10 à 0, et on retrouve alors la seconde situation décrite plus haut : grâce à de plus mauvaises notes (en l'occurrence en physique),  $x$  devient reçu au concours (au détriment de  $y$  qui est éliminé) ! On peut bien sûr s'interroger pour savoir si un tel système de sélection est satisfaisant ; mais les autres paragraphes de cet article montrent que cette question n'est pas propre à la méthode de Borda itérée...

Un autre paradoxe (voir [Davidson et Odeh, 1972]) dont souffre la méthode de Borda est parfois connu sous le nom du *paradoxe de l'ordre inverse*. Il se produit (éventuellement) quand on supprime un candidat d'une élection et que cette suppression

a pour effet d'inverser l'ordre des candidats restants (bien sûr sans modifier les préférences des votants). Pour illustrer ce paradoxe, considérons le cas de quatre<sup>23</sup> candidats  $x, y, z$  et  $t$  et de sept votants dont les préférences sont :

pour 2 votants :  $x > t > z > y$  ;  
 pour 2 votants :  $y > x > t > z$  ;  
 pour 3 votants :  $t > z > y > x$ .

Le lecteur vérifiera facilement que les scores de Borda des candidats sont :

score de  $x = 17$ , score de  $y = 16$ , score de  $z = 15$ , score de  $t = 22$ ,

ce qui nous permet de considérer l'ordre  $t > x > y > z$  comme représentatif de la préférence collective.

Imaginons que, pour diverses raisons,  $t$  ne peut pas assumer le poste qu'il brigait. On pourrait légitimement penser que les votants vont confier le poste à celui qu'ils avaient classé deuxième dans l'élection, c'est-à-dire ici  $x$ . Et pourtant, que se passe-t-il si on décide de refaire l'élection sur les trois candidats restants ? La restriction des préférences précédentes aux trois candidats  $x, y, z$  donne :

pour 2 votants :  $x > z > y$  ;  
 pour 2 votants :  $y > x > z$  ;  
 pour 3 votants :  $z > y > x$ ,

et les scores de Borda deviennent :

score de  $x = 13$ , score de  $y = 14$ , score de  $z = 15$ .

De ce fait, le nouvel ordre collectif est  $z > y > x$ , c'est-à-dire, contre toute attente, exactement l'ordre inverse de l'ordre obtenu en supprimant  $t$  de l'ordre collectif initial !

Une variante<sup>24</sup> de ce paradoxe consiste à supprimer le perdant d'une élection (c'est-à-dire un candidat de plus petit score) et à constater que cette suppression peut entraîner un renversement du classement des candidats restants. Il est facile d'adapter l'exemple précédent pour illustrer cette variante : il suffit de renverser l'ordre des préférences des votants. On obtient alors :

pour 2 votants :  $y > z > t > x$  ;  
 pour 2 votants :  $z > t > x > y$  ;  
 pour 3 votants :  $x > y > z > t$ ,

ce qui donne les scores suivants :

score de  $x = 18$ , score de  $y = 19$ , score de  $z = 20$ , score de  $t = 13$ ,

d'où l'ordre collectif  $z > y > x > t$ . La suppression du perdant  $t$  donne pour scores :

score de  $x = 15$ , score de  $y = 14$ , score de  $z = 13$ ,

d'où l'ordre collectif  $x > y > z$  : la suppression du perdant a eu pour conséquence d'invertir la préférence collective exprimée sur les autres candidats. Cela consolera peut-être les perdants de savoir que, bien qu'ils soient derniers, leur présence puisse être

<sup>23</sup> Ce paradoxe peut être généralisé à un nombre quelconque de candidats (voir [Fishburn, 1974] ; voir aussi [Saari, 1989]).

<sup>24</sup> Proposée par C. Plott et J. Ferejohn, d'après P. Fishburn [1974] (voir aussi [Saari, 1992], où l'on trouvera une analyse complète des différences de classements entre règles à points).

néanmoins si importante ! De façon moins anecdotique, cela montre aussi qu'un candidat peut avoir intérêt à se présenter à une élection même s'il est sûr d'être dernier, afin de porter préjudice à certains autres candidats ou d'exercer sur eux une certaine forme de chantage. Mais cela n'est peut-être pas une surprise car la vie politique offre régulièrement de tels exemples de candidatures barrages.

Le dernier paradoxe que nous allons envisager dans cette partie concerne une variante de la méthode de Borda. Elle consiste à n'attribuer des points qu'aux candidats arrivant dans les premiers des préférences exprimées par les votants. Plus précisément, soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 1 ; alors, pour chaque votant, on attribue  $k$  points au candidat placé en tête par le votant considéré,  $k - 1$  points au candidat placé en deuxième,  $k - 2$  au candidat placé en troisième, etc., jusqu'au candidat placé en  $k^e$  position, auquel on attribue 1 point, après quoi on n'attribue aucun point aux candidats placés au-delà. Quand  $k$  est égal au nombre de candidats, on reconnaît la méthode de Borda, et quand  $k$  vaut 1, on retrouve le scrutin uninominal à un tour.

Que se passe-t-il quand on fait varier  $k$  pour un profil donné ? On pourrait s'attendre à observer une certaine stabilité dans les préférences collectives, au moins pour les vainqueurs. L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien ! Dans cet exemple, quatre candidats  $x, y, z, t$  se disputent les faveurs de sept votants, dont les préférences sont :

pour 3 votants :  $x > y > z > t$  ;  
 pour 1 votant :  $y > z > x > t$  ;  
 pour 1 votant :  $y > z > t > x$  ;  
 pour 2 votants :  $z > t > x > y$ .

Pour  $k = 1$  (il s'agit donc du scrutin uninominal à un tour),  $x$  est vainqueur (il gagne avec 3 voix en sa faveur, contre 2 pour  $y$ , 2 aussi pour  $z$  et 0 pour  $t$  ; la préférence collective peut être représentée par le préordre total  $x > y \sim z > t$ , où  $y \sim z$  symbolise le fait que  $y$  et  $z$  sont *ex æquo*). Pour  $k = 2$ , c'est  $y$  qui gagne (les scores valent 6 pour  $x$ , 7 pour  $y$ , 6 pour  $z$  et 2 pour  $t$ , et la préférence collective est donnée par le préordre total  $y > x \sim z > t$ ). Mais pour  $k \geq 3$ , c'est  $z$  le vainqueur (pour  $k = 3$ , les scores sont 12 pour  $x$ , 12 pour  $y$ , 13 pour  $z$ , 5 pour  $t$ , la préférence collective devenant le préordre total  $z > x \sim y > t$  ; il est facile de voir que, à partir de  $k = 3$ , toute augmentation de  $k$  d'une unité a pour effet de faire croître les scores d'une quantité égale au nombre de votants, ce qui bien sûr laisse inchangé l'ordre des scores et donc la préférence collective et le vainqueur).

On a donc pour cet exemple trois vainqueurs différents pour trois valeurs successives de  $k$ . De façon plus générale, pour  $n$  candidats, on peut construire des profils tels qu'en faisant varier  $k$  de 1 à  $n - 1$ , on obtienne  $n - 1$  vainqueurs distincts (ce que P. Fishburn [1974] propose d'appeler le *paradoxe de la méthode des points tronquée*<sup>25</sup> ; on remarquera qu'il n'est pas possible, compte tenu de la remarque entre parenthèses précédente, d'obtenir  $n$  vainqueurs différents, puisque seules  $n - 1$  valeurs de  $k$  peuvent déterminer des préférences collectives différentes).

#### 4.4. Méthode de Hamilton (scrutin de liste proportionnel au plus fort reste)<sup>26</sup>

<sup>25</sup> Plus précisément : *the truncated point-total paradox*.

<sup>26</sup> Comme il est dit plus haut, la méthode de Hamilton a été conçue pour déterminer une répartition, entre différents états, des sièges à pourvoir dans une assemblée, plutôt que pour déterminer l'attribution de ces sièges aux députés qui vont les pourvoir. Néanmoins, par souci d'homogénéité, je présente ici la méthode et ses paradoxes comme si on voulait élire des individus, et non répartir des sièges. Il en sera de même pour la méthode de Jefferson dans la partie suivante.

Quand plusieurs sièges sont à pourvoir, il arrive que l'on adopte un *scrutin de liste proportionnel*. C'est le cas par exemple pour les élections européennes en France ou pour certaines élections législatives (plus actuellement en France, mais ce mode de scrutin proportionnel à un tour fut en vigueur pour les élections législatives de mars 1986 ; en revanche, ce genre de méthode est utilisé en France, avec certaines adaptations, pour déterminer la répartition des sièges entre les départements en fonction de leurs populations<sup>27</sup>). Dans un tel mode électoral, des listes regroupant autant de candidats qu'il y a de sièges à pourvoir se présentent aux suffrages des électeurs et on cherche à attribuer à chaque liste un nombre de sièges qui soit proportionnel au nombre de voix recueillies par la liste en question. Comme en général ce nombre proportionnel, appelé *quota* de cette liste, n'est pas un entier, il faut en outre préciser comment gérer les arrondis. La méthode de Hamilton gère ceux-ci selon la règle du plus fort reste. Elle procède comme suit.

Soit  $n$  le nombre de votants et soit  $m$  le nombre de sièges à pourvoir ; les listes sont donc constituées de  $m$  candidats ; chaque votant choisit une des listes. Dans un premier temps, on attribue à chaque liste un nombre de sièges presque proportionnel aux nombres de voix qu'elle a recueillies. Plus précisément, soit  $L$  une liste et soit  $l$  le nombre de votants qui ont choisi  $L$ . On calcule le quotient  $q$  et le reste  $r$  de la division euclidienne de  $l \times m$  par  $n$ , c'est-à-dire  $q$  et  $r$  vérifiant :

$$l \times m = q \times n + r, \text{ avec } 0 \leq r < n,$$

et on attribue  $q$  sièges à  $L$  (autrement dit, on attribue à  $L$  un nombre de sièges égal à la partie entière par défaut du quota  $(l \times m) / n$ , quantité qui donnerait le nombre de sièges auxquels  $L$  peut prétendre s'il n'y avait pas la contrainte d'intégrité). Dans un second temps, on complète les  $m$  sièges en attribuant les sièges non pourvus aux listes ayant les plus forts restes  $r$ , à raison d'un siège par liste. On respecte ainsi la *règle des quotas*, laquelle stipule qu'on doit attribuer à chaque liste  $L$  un nombre de sièges qui s'écarte de moins d'une unité du quota de  $L$ .

Considérons ainsi l'exemple suivant : trois listes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  se disputent les suffrages de  $n = 102$  votants pour pourvoir  $m = 7$  sièges. Supposons que  $X$  (respectivement  $Y$  et  $Z$ ) obtienne  $l_X = 20$  voix (respectivement  $l_Y = 34$  voix et  $l_Z = 48$  voix) ; on obtient alors :

$$(l_X \times m) / n \approx 1,37 ; (l_Y \times m) / n \approx 2,33 ; (l_Z \times m) / n \approx 3,29.$$

Donc, dans le premier temps,  $X$  reçoit 1 siège,  $Y$  en reçoit 2 et  $Z$  en reçoit 3. Dans le second temps, comme il reste un siège à pourvoir et que  $X$  possède le plus fort reste (0,37 contre 0,33 pour  $Y$  et 0,29 pour  $Z$ ),  $X$  reçoit le dernier siège en supplément du siège déjà acquis. Finalement,  $X$  obtient donc 2 sièges,  $Y$  obtient aussi 2 sièges et  $Z$  en obtient 3.

Ce mode de scrutin est monotone, puisque tout transfert de voix d'une liste vers une autre ne peut que profiter à celle-ci. Il réserve néanmoins des surprises, comme le montrent les considérations suivantes, mettant en jeu d'autres formes de monotonie.

Imaginons que, dans l'exemple précédent, le nombre  $m$  de sièges à pourvoir augmente, passant à 8, sans que rien d'autre ne change ( $n$  reste égal à 102 votants et on a encore  $l_X = 20$  voix,  $l_Y = 34$  voix et  $l_Z = 48$  voix). On pourrait penser que, par rapport à la situation précédente ( $m = 7$ ), une des listes  $X$ ,  $Y$  ou  $Z$  va gagner un siège sans que les autres listes soient affectées par cette variation de  $m$ . Mais effectuons les calculs ; on obtient :

$$(l_X \times m) / n \approx 1,57 ; (l_Y \times m) / n \approx 2,67 ; (l_Z \times m) / n \approx 3,76.$$

<sup>27</sup> Voir à ce propos le dossier consacré aux élections dans *Pour la Science* d'avril 2002, et particulièrement une contribution de M. Balinski [2002].

Comme on pouvait s'y attendre, les quotas  $(l \times m) / n$  croissent par rapport à avant. À l'issue de la première étape, X obtient 1 siège, Y en obtient 2 et Z, 3, comme précédemment. Mais la règle du plus fort reste privilégiée maintenant Z (avec 0,76) pour un des sièges non encore attribués, puis Y (avec 0,67) pour le second siège non attribué. On obtient donc finalement : 1 siège pour X, 3 pour Y et 4 pour Z. Par conséquent, malgré l'augmentation du nombre de sièges, X en perd un !... Ce phénomène est connu dans la littérature sous le nom du *paradoxe de l'Alabama*.<sup>28</sup>

On peut rendre la situation encore plus paradoxale, en supposant maintenant que  $m$  et  $n$  croissent tous deux d'une unité par rapport aux données initiales, et que le nouvel électeur vote pour X. On a donc les caractéristiques suivantes :  $m = 8$ ,  $n = 103$ ,  $l_X = 21$  voix,  $l_Y = 34$  voix et  $l_Z = 48$  voix. Pour ces nouvelles données, les quotas valent :

$$(l_X \times m) / n \approx 1,631 ; (l_Y \times m) / n \approx 2,641 ; (l_Z \times m) / n \approx 3,728.$$

Ce qui donne la répartition suivante des sièges : 1 siège pour X, 3 pour Y et 4 pour Z. Ici encore, malgré l'augmentation du nombre de sièges à pourvoir et du nombre de voix en sa faveur (on notera que la représentativité de X augmente, passant de 19,61 % à 20,39 %, tandis que celles de Y et de Z diminuent), X perd quand même un siège ! Remarquons qu'on peut construire des exemples pour lesquels un accroissement  $k$  arbitrairement grand du nombre d'électeurs en faveur de X en même temps que l'ajout d'un siège conduirait à la même conclusion : il suffit par exemple de multiplier les valeurs initiales de l'exemple précédent par  $k$ .

Un autre paradoxe « historique » est celui appelé *paradoxe de la population*. Imaginons que trois listes X, Y et Z se disputent les  $m = 20$  sièges du conseil d'administration d'une association. Un vote est organisé, qui indique que ces trois listes recueillent respectivement  $l_X = 1786$  voix,  $l_Y = 1243$  voix et  $l_Z = 671$  voix, ce qui donne donc  $n = 3700$  suffrages exprimés. La répartition déterminée par la méthode de Hamilton est alors la suivante : 10 sièges pour X (avec  $l_X \times m / n \approx 9,65$ ), 7 sièges pour Y (avec  $l_Y \times m / n \approx 6,72$ ) et 3 sièges pour Z (avec  $l_Z \times m / n \approx 3,63$ ). Mais on s'aperçoit qu'on a oublié les votes par correspondance de 65 membres ! Parmi ceux-ci figurent 19 électeurs de X et seulement 6 électeurs de Z. Finalement, on obtient donc  $l_X = 1805$  voix,  $l_Y = 1283$  voix et  $l_Z = 677$  voix, pour un total de  $n = 3765$  votants. La progression de X, égale à  $19/1786$ , soit environ 1,06 % de son score initial, est donc plus importante que celle de Z, égale à seulement  $6/671$ , soit environ 0,89 %. La répartition des sièges devant se faire en principe selon les proportions des votants en faveur des trois listes, on pourrait donc penser que l'évolution de la répartition des sièges soit plus favorable, ou du moins aussi favorable, pour X que pour Z. Et pourtant, la nouvelle répartition donnée par la méthode de Hamilton n'attribue que 9 sièges à X (avec  $l_X \times m / n \approx 9,588$ ), 7 sièges pour Y (avec

<sup>28</sup> Après le recensement de 1880, C.W. Seaton, chef de service au Bureau du recensement, faisait des simulations pour savoir combien de sièges la méthode de Hamilton attribuait à chaque état, pour des nombres de sièges au Congrès compris entre 275 et 350 (en effet, un moyen d'éviter les polémiques sur le choix de la méthode à appliquer consistait à chercher un nombre total de sièges qui conduisît à une même répartition pour les différentes méthodes envisagées). Dans une lettre adressée au Congrès en octobre 1881, il décrit ce qu'il baptisa *paradoxe de l'Alabama*, en constatant que l'Alabama se voyait attribuer 8 sièges si le nombre total était 299, mais seulement 7 si ce nombre total passait à 300 (tandis que le Texas et l'Illinois voyaient tous deux augmenter leurs nombres de sièges d'une unité chacun). En fait, ce paradoxe pourrait s'appeler *paradoxe de Rhode Island*, puisque le phénomène s'était déjà produit pour cet état après le recensement de 1870.

$l_Y \times m / n \approx 6,815$ ) et 4 sièges pour Z (avec  $l_Z \times m / n \approx 3,596$ ). Autrement dit, bien que X progresse plus que Z, X doit céder un de ses sièges à Z (Y restant stable) !<sup>29</sup>.

Pour décrire un troisième paradoxe « historique », imaginons une situation un peu complexe. Une population de 14913 votants doit répartir 77 sièges entre 3 listes X, Y, Z. Les élections donnent à X, Y, Z respectivement  $l_X = 694$  voix,  $l_Y = 7280$  voix et  $l_Z = 6939$  voix (et aucune abstention !). Les quotas étant  $694 \times 77 / 14913 \approx 3,583$  pour X,  $7280 \times 77 / 14913 \approx 37,589$  pour Y,  $6939 \times 77 / 14913 \approx 35,828$  pour Z, la méthode de Hamilton attribue 3 sièges à X, 38 à Y et 36 à Z. L'assemblée nouvellement élue décide alors d'élargir le corps électoral en incluant un groupe très minoritaire de 197 nouveaux électeurs non encore représentés. Afin que cet accroissement ne porte pas préjudice aux représentants déjà élus, l'assemblée décide d'accroître en même temps le nombre de sièges la constituant. Plus précisément, chaque siège représentant  $14913 / 77 \approx 194$  électeurs, ce qui correspond à peu près à l'augmentation du nombre d'électeurs, l'assemblée décide de porter son nombre de sièges de 77 à 78, estimant, en misant sur la stabilité des votes, que le nouveau siège devrait revenir au nouveau groupe, représenté par une nouvelle liste que nous appellerons T. Et en effet une nouvelle élection, pour l'instant d'une conformité rare aux prévisions, donne  $l_X = 694$  voix,  $l_Y = 7280$  voix,  $l_Z = 6939$  voix (belle stabilité du corps électoral !) et  $l_T = 197$  voix (et toujours pas d'abstention !). Les quotas sont alors :  $694 \times 78 / 15110$ , soit environ 3,5825 pour X,  $7280 \times 78 / 15110$ , soit environ 37,5804 pour Y,  $6939 \times 78 / 15110$ , soit environ 35,82 pour Z, et  $197 \times 78 / 15110$ , soit environ 1,016 pour T. L'application de la méthode de Hamilton donne donc bien 1 siège à T, comme prévu ; en revanche, ce qui n'était pas prévu, c'est que Y n'a plus que 37 sièges alors que X en récupère 4 : l'entrée de T dans l'assemblée s'est traduite par un transfert concomitant d'un siège de Y vers X. Cet effet est connu sous le nom du *paradoxe du nouvel état*<sup>30</sup>.

Pour illustrer un dernier effet indésirable (que l'on pourrait appeler *paradoxe du transfert de population*), considérons le nouvel exemple ci-dessous, avec encore 3 listes X, Y et Z, mais  $m = 5$  sièges et  $n = 27$  votants se répartissant en  $l_X = 14$ ,  $l_Y = 10$  et  $l_Z = 3$  : les quotas valent alors respectivement 2,59, 1,85 et 0,56 ; l'application de la méthode de Hamilton aboutit donc à attribuer 3 sièges à X, 2 à Y et 0 à Z : X, qui représente plus de la moitié des votants, obtient ainsi la majorité absolue avec plus de la moitié des sièges.

<sup>29</sup> Le paradoxe de la population a été constaté au début du XX<sup>e</sup> siècle. En 1900, la population du Maine s'élevait à 694466 habitants alors que celle de la Virginie était environ 2,67 fois plus importante, avec 1854184 habitants. L'application de la méthode de Hamilton aux populations de 1900 aurait donné 10 sièges à la Virginie et 3 au Maine. Mais une interpolation effectuée à partir du recensement de 1910 permet d'estimer à 1873951 le nombre d'habitants de la Virginie en 1901 et à 699114 celui du Maine pour la même année, soit un nouveau rapport de 2,68, c'est-à-dire supérieur à l'ancien. Là aussi, on s'attendrait à ce que le rapport entre les nombres de sièges attribués à ces deux états évolue de la même façon que le rapport des populations. Et pourtant l'application de la méthode de Hamilton aux populations de 1901 aurait donné seulement 9 sièges à la Virginie et 4 au Maine : la population de la Virginie crût plus vite que celle du Maine et malgré cela la Virginie eût perdu un siège...

<sup>30</sup> Il pourrait aussi s'appeler *paradoxe de l'Oklahoma* car il apparut quand cet état a rejoint les États-Unis, en 1907. À cette époque, le Congrès comptait 386 sièges, répartis entre les états selon le recensement de 1900, lequel dénombrait 74562608 habitants au total. Chaque siège devant donc représenter 193167 personnes et en estimant à environ un million le nombre d'habitants de l'Oklahoma, le nombre de sièges fut augmenté de 5, passant de 386 à 391. L'application de la méthode de Hamilton après l'entrée de l'Oklahoma dans les États-Unis aurait bien attribué les 5 nouveaux sièges à l'Oklahoma mais, à la surprise des employés du Bureau de recensement se livrant à ces simulations, l'état de New York (7264183 habitants) aurait été obligé de donner un de ses 38 sièges au Maine (694466 habitants), alors que leurs populations (ainsi que celles des autres états) étaient supposées inchangées.

Imaginons maintenant que, par exemple suite à un accord électoral entre  $Y$  et  $Z$ , un des électeurs de  $Y$  vote pour  $Z$  ; la nouvelle répartition des voix devient :  $l_X = 14$ ,  $l_Y = 9$  et  $l_Z = 4$ , ce qui donne pour les quotas respectivement 2,59, 1,67 et 0,74. Par conséquent, la nouvelle répartition des sièges est : 2 sièges pour  $X$ , 2 sièges pour  $Y$  et 1 siège pour  $Z$ . Comme on pouvait s'y attendre, le nombre de sièges de  $Y$  n'augmente pas et celui de  $Z$  ne diminue pas. En fait le nombre de sièges de  $Z$  augmente, ce qui n'est pas choquant, mais ce qui est plus surprenant, c'est que celui de  $X$ , pourtant apparemment non impliqué par le transfert des voix de  $Y$  vers  $Z$ , diminue d'une unité. Autrement dit, le transfert d'une voix de  $Y$  vers  $Z$  a pour effet de transférer un siège de  $X$  vers  $Z$ , ce qui au passage fait perdre à  $X$  la majorité absolue alors qu'il continue bien sûr de représenter plus de la moitié des votants ! On voit ici tout l'intérêt pour  $Y$  et  $Z$  de passer un accord électoral s'ils veulent pouvoir mettre ensemble  $X$  en minorité...

#### 4.5. Méthode de Jefferson (méthode des diviseurs)

Un moyen d'éviter la gestion des restes consiste à faire en sorte... qu'il n'y ait pas de reste ! C'est ce qu'a proposé Jefferson avec la *méthode des diviseurs*. Ici, soit de nouveau  $m$  le nombre de sièges à pourvoir entre  $k$  listes, chaque liste  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) recueillant  $l_i$  voix. On détermine un entier  $d$  vérifiant :

$$\lfloor l_1 / d \rfloor + \lfloor l_2 / d \rfloor + \dots + \lfloor l_k / d \rfloor = m,$$

où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ , et on attribue à la  $i^e$  liste un nombre de sièges égal à  $\lfloor l_i / d \rfloor$  (en fait, la répartition des sièges est indépendante du diviseur  $d$  retenu, dès lors qu'il respecte l'égalité précédente).

Considérons ainsi l'exemple pour lequel on a  $m = 5$  sièges,  $k = 3$  listes  $X, Y, Z$  et  $n = 2047$  votants se répartissant en  $l_X = 936$ ,  $l_Y = 623$ ,  $l_Z = 488$ . On constate que  $d = 312$  convient, puisque l'on a :

$$\lfloor l_X / 312 \rfloor + \lfloor l_Y / 312 \rfloor + \lfloor l_Z / 312 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor + \lfloor 1,997 \rfloor + \lfloor 1,564 \rfloor = 5.$$

La répartition associée donne donc : 3 sièges pour  $X$ , 1 pour  $Y$  et 1 aussi pour  $Z$ .

Imaginons maintenant que trois électeurs de la troisième liste décident de voter pour la deuxième ; on obtient alors :  $l_X = 936$ ,  $l_Y = 626$ ,  $l_Z = 485$ . La valeur  $d = 312$  ne convient plus, mais on peut prendre en revanche  $d = 313$  :

$$\lfloor l_X / 313 \rfloor + \lfloor l_Y / 313 \rfloor + \lfloor l_Z / 313 \rfloor = \lfloor 2,99 \rfloor + \lfloor 2 \rfloor + \lfloor 1,55 \rfloor = 5,$$

ce qui donne la nouvelle répartition : 2 sièges pour  $X$ , 2 pour  $Y$  et 1 pour  $Z$ . Le nombre de sièges de  $Y$  augmente donc mais, nouvel étonnement, celui de la liste  $X$ , qui ne semblait pas concernée par le transfert des voix, diminue d'une unité ! La méthode de Jefferson n'est donc pas à l'abri de ce que nous avons appelé plus haut le paradoxe du transfert de population, ce qui ne manquera pas là aussi d'inspirer des accords électoraux entre  $Y$  et  $Z$ .

En revanche, on peut montrer (voir [Balinski et Young, 1982]) que la méthode de Jefferson (ainsi en fait que d'autres méthodes fondées elles aussi sur l'utilisation de diviseurs) n'est pas sujette aux paradoxes de l'Alabama, de la population et du nouvel état. Mais on peut aussi montrer que cette méthode n'est pas toujours applicable là où

d'autres méthodes peuvent l'être<sup>31</sup>. Par exemple, considérons une élection où deux listes  $X$  et  $Y$  se disputent deux sièges alors que  $X$  obtient deux fois plus de voix que  $Y$ . Appelons  $\alpha$  le nombre de voix obtenues par  $Y$  (donc  $X$  a obtenu  $2\alpha$  voix). Il est facile de constater qu'il n'existe aucun diviseur  $d$  vérifiant  $\lfloor \alpha / d \rfloor + \lfloor 2\alpha / d \rfloor = 2$  : si  $d$  est inférieur ou égal à  $\alpha$ , la somme précédente vaut au moins 3 (le premier terme vaut au moins 1 et le second au moins 2) ; sinon le premier terme est nul et le second vaut au plus 1. En revanche la méthode de Hamilton aboutira (en attribuant un siège à  $X$  et un à  $Y$ , puisque leurs représentativités respectives valent  $2/3$  et  $1/3$ ).

Mais réciproquement, la méthode de Hamilton pourra échouer, du moins si on ne fait pas appel à un critère supplémentaire, là où la méthode de Jefferson n'aura pas de problème. Par exemple, ici encore pour deux listes  $X$  et  $Y$ , deux sièges et quarante votants, si  $X$  obtient 30 voix et  $Y$  10, les quotas sont respectivement 1,5 pour  $X$  et 0,5 pour  $Y$  : la méthode de Hamilton attribue d'abord un siège à  $X$  mais ne sait, seule, que faire du second siège. La méthode de Jefferson tranchera sans hésitation, en attribuant 2 sièges à  $X$  et 0 à  $Y$  (par exemple grâce au diviseur  $d = 15$ ). Mais cet inconvénient de la méthode de Hamilton peut paraître moins gênant, parce que moins structurel, que celui de la méthode de Jefferson : en effet, il est toujours possible de faire intervenir d'autres critères pour départager les *ex æquo*, tandis que l'échec précédent de la méthode de Jefferson affecte sa mise en œuvre elle-même.

Un autre gros défaut de la méthode de Jefferson est de ne pas respecter la règle des quotas. Pour s'en convaincre, considérons le dernier exemple de cet article. Il concerne six listes devant se partager deux sièges selon les suffrages de neuf votants répartis comme suit : 4 voix pour la première liste, 1 voix pour chacune des cinq autres listes. Le diviseur  $d = 2$  convient et conduit à attribuer 2 sièges à la première liste et rien aux autres, alors que les quotas valent 0,89 pour la première liste et 0,22 pour les autres : la règle des quotas (qui attribuerait au plus 1 siège à la première liste) n'est donc pas respectée.

## 5. CONCLUSION : THÉORÈMES D'IMPOSSIBILITÉ

Les exemples précédents illustrent plusieurs paradoxes et répondent aux questions posées dans l'introduction : dans une élection présidentielle en France, il est possible qu'un candidat préféré à n'importe quel autre candidat par une majorité de votants (autrement dit, un vainqueur de Condorcet) ne soit pas élu ; pour ce même genre d'élection, le « vote utile » peut empêcher celui qui en bénéficie d'être élu ; on peut avoir intérêt à voter pour son pire adversaire plutôt que pour son candidat préféré pour faire élire celui-ci ; il y a des modes de scrutin pour lesquels on peut avoir intérêt à s'abstenir plutôt que de voter pour son candidat préféré ; un parti peut avoir la majorité absolue dans une assemblée en ne représentant qu'une minorité, même faible, des votants ; dans un vote à la proportionnelle, augmenter le nombre total de sièges peut faire perdre des sièges à une liste ; on peut devenir élu en régressant dans les préférences des votants, etc.

Cette multiplicité de paradoxes peut faire douter de l'existence d'un mode de scrutin donnant entière satisfaction. Et en effet, il existe ce qu'on appelle parfois des

<sup>31</sup> Il y a toujours des cas pathologiques qui nécessitent le recours à des critères extérieurs, quel que soit le mode de scrutin adopté. C'est le cas par exemple quand les listes (ou les candidats pour des élections uninominales) recueillent exactement le même nombre de voix et sont ainsi indiscernables du point de vue des suffrages. Si le nombre de sièges n'est pas un multiple du nombre de listes, il est nécessaire de trancher arbitrairement en faveur ou en défaveur de telle ou telle liste (ou de changer le nombre de sièges !).

*théorèmes d'impossibilité*. Le plus célèbre est sans nul doute celui de K. Arrow [1951]. Pour l'énoncer, définissons d'abord quelques propriétés, en termes non techniques (le lecteur désireux de trouver une présentation plus rigoureuse se reportera fructueusement à l'article de B. Monjardet [2003] dans ce numéro) :

- un *préordre total* est un classement qui diffère d'un ordre total par la possibilité d'avoir des *ex æquo* ;
- l'*unanimité* (ou *principe de Pareto*) est le principe selon lequel un candidat strictement préféré par tous les votants à un autre candidat doit aussi être strictement préféré à celui-ci dans la préférence collective ;
- l'*indépendance* est le principe selon lequel la préférence collective entre deux candidats  $x$  et  $y$  ne doit dépendre que des préférences individuelles des votants portant sur ces deux candidats (pour choisir collectivement entre  $x$  et  $y$ , on ne peut donc pas faire intervenir les préférences individuelles portant sur d'autres candidats) ; ainsi, tant que les préférences individuelles impliquant  $x$  et  $y$  et seulement eux restent inchangées, la préférence collective entre  $x$  et  $y$  ne doit pas changer non plus ;
- un *dictateur* est un votant qui impose sa préférence stricte : si un candidat  $x$  est strictement préféré à un candidat  $y$  par le dictateur, toute préférence collective doit classer  $x$  avant  $y$ , et les préférences collectives obtenues de manière dictatoriale ne peuvent donc différer que par la façon de classer les *ex æquo* du dictateur.

Remarquons que la structure de préordre total semble très raisonnable pour modéliser des préférences (individuelles ou collectives) : elle offre plus de souplesse que celle d'ordre total en autorisant les *ex æquo* et présente simultanément une certaine « rationalité » en interdisant les situations cycliques dans les préférences strictes : on ne peut pas à la fois préférer strictement un candidat  $x$  à un autre candidat  $y$ , lui-même strictement préféré à un troisième candidat  $z$  qui par ailleurs serait à son tour strictement préféré à  $x$ . Les propriétés d'unanimité et d'indépendance semblent aussi souhaitables et même naturelles. Quant à l'absence de dictateur, elle semble encore plus souhaitable...

Partant, il semble peu contraignant d'imposer simultanément ces propriétés et l'intuition peut laisser croire qu'il ne doit pas être très difficile de trouver une procédure les satisfaisant toutes effectivement. Le théorème d'Arrow « classique » (il existe en effet des variantes) va pourtant ruiner une telle espérance, ce qui représente peut-être finalement le paradoxe le plus inattendu :

THÉORÈME D'ARROW. Pour au moins trois votants et au moins trois candidats, il n'existe pas de mode de scrutin associant un préordre total à tout profil de préordres totaux qui respecte simultanément les propriétés d'unanimité et d'indépendance et qui soit sans dictateur.

Il existe d'autres résultats d'impossibilité. Nous avons rencontré plus haut une illustration du théorème d'Hervé Moulin [1988] sur l'abstention :

THÉORÈME DE MOULIN. Pour au moins quatre candidats (et suffisamment de votants), tout mode de scrutin choisissant le vainqueur de Condorcet, quand il existe, comme vainqueur de l'élection est sujet au paradoxe de l'abstention.

On peut aussi rapprocher du théorème d'Arrow un autre théorème d'impossibilité établi indépendamment par A.F. Gibbard [1973] et M.A. Satterthwaite [1973 et 1975] (voir aussi la synthèse d'H. Moulin [1985]). Pour cela, rappelons que l'on qualifie de *manipulable* une procédure telle que, dans certains cas, un votant a intérêt à ne pas être

sincère, c'est-à-dire à ne pas voter selon ses vraies préférences. Le résultat suivant montre que les paradoxes liés à la manipulabilité et illustrés plus haut sont inévitables si on refuse l'existence d'un dictateur :

THÉORÈME DE GIBBARD ET SATTERTHWAITE. Quand il y a au moins trois candidats, toute méthode sans dictateur est manipulable.

Des résultats d'impossibilité analogues existent concernant les scrutins de liste. Ainsi, le théorème suivant (voir [Balinski et Young, 1982]) généralise un résultat constaté plus haut en indiquant qu'il faut choisir entre la violation possible de la règle des quotas pour éviter le paradoxe de la population (ce que fait la méthode de Jefferson) et le respect de cette règle en s'exposant à ce paradoxe (ce que fait la méthode de Hamilton).

THÉORÈME DE BALINSKI ET YOUNG. Aucune méthode respectant la règle des quotas n'échappe au paradoxe de la population.

Cependant, la théorie des choix collectifs ne se limite pas à ces aspects négatifs et, à défaut de pouvoir exhiber une procédure idéale inexistante, elle fournit aussi un certain nombre d'éléments susceptibles d'orienter le choix d'une règle électorale en mettant en évidence certains écueils à éviter et dont il vaut mieux connaître l'existence. De plus, les paradoxes illustrés plus haut ne sont pas non plus systématiques et peuvent même, on l'a vu, se produire rarement. D'un point de vue pratique, il n'y a donc pas lieu de se désespérer systématiquement. Globalement, en mettant en évidence les difficultés que l'on rencontre dans la conception d'un mode de scrutin satisfaisant, en combattant certains préjugés, en séparant ce qui est possible de ce qui ne l'est pas et, plus généralement, en proposant des normes, des axiomatisations, des méthodes pour étudier les modes de scrutin, les mathématiques sociales auront déjà atteint un objectif positif : aider les citoyens que nous sommes à mieux prendre conscience des limites intrinsèques à tout système de vote et nous permettre d'agir en meilleure connaissance de cause.

*Remerciements.* Je remercie vivement Bernard Monjardet, Dominique Lepelley, Vincent Merlin et les rapporteurs pour leurs relectures et leurs conseils. Ceux-ci m'ont permis d'enrichir et de préciser plusieurs passages de ce texte. Toute inexactitude résiduelle n'est cependant bien sûr imputable qu'à moi-même.

## BIBLIOGRAPHIE

ANDJIGA N.-G., CHANTREUIL F. et LEPELLEY D., « La mesure du pouvoir de vote », *Mathématiques et Sciences humaines* 163, 2003, p. 111-145.

ANDJIGA N.-G. et MOULEN J., « Preference aggregation, collective choice and generalized binary constitutions », *Mathématiques et Sciences humaines* 163, 2003, p. 69-85.

ARROW K.J. (1951) *Social choice and individual values*, New York, Wiley, 1951, on préférera l'édition de 1963].

BADINTER É. et BADINTER R., *Condorcet : un intellectuel en politique*, Paris, Fayard, 1988.

- BAÏOU M. et BALINSKI M., « Découpage électoral », *Pour la Science* 294, 2002, p. 60-64.
- BAKER K.M., *Condorcet. From natural philosophy to social mathematics*, Chicago, The University of Chicago Press, 1975.
- BALINSKI M., « Répartitions des sièges », *Pour la Science* 294, 2002, p. 52-57.
- BALINSKI M. et YOUNG P., *Fair Representation, Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, New Haven et Londres, Yale University Press, 1982.
- BARTHÉLEMY J.-P., GUÉNOCHE A. et HUDRY O., « Median linear orders: heuristics and a branch and bound algorithm », *European Journal of Operational Research* 42(3), 1989, p. 313-325.
- BARTHÉLEMY J.-P. et MONJARDET B., « The median procedure in cluster analysis and social choice theory », *Mathematical Social Sciences* 1, 1981, p. 235-267.
- BARTHÉLEMY J.-P. et MONJARDET B., « The median procedure in data analysis: new results and open problems », in *Classification and related methods of data analysis*, H.H. Bock ed., Amsterdam, North-Holland, 1988.
- BERG S. et LEPELLEY D., « Note sur le calcul de la probabilité des paradoxes de vote », *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines* 120, 1992, p. 33-48.
- BLACK D., *The theory of committees and elections*, Londres, Cambridge University Press, 1958.
- BORDA J.-C., *Mémoire sur les élections au scrutin, Histoire de l'Académie royale des sciences pour 1781*, Paris, 1784.
- BOUYSSOU D. et PERNY P., « Aide multicritère à la décision et théorie du choix social », *Nouvelles de la Science et des Technologies* 15, 1997, p. 61-72.
- BRAMS S. et FISHBURN P., « Paradoxes of preferential voting », *Mathematics Magazine* 56, 1983, p. 207-214.
- CARITAT M. J. A. N., marquis de CONDORCET, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris, 1785.
- CHOUILLET A.-M. et CRÉPEL P. (sous la direction de), *Condorcet. Homme des Lumières et de la Révolution*, ENS Éditions Fontenay/Saint-Cloud, 1997.
- CRÉPEL P. et GILAIN C. (sous la direction de), *Condorcet : mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, Paris, Minerve, 1989.
- DAVIDSON R.R. et ODEH R.E., « Some Inconsistencies in Judging Problems », *Journal of Combinatorial Theory (A)* 13, 1972, p. 162-169.
- DE CAROLIS L. M., *A Biography of Alexander Hamilton*, Department of Alfa-informatica, University of Groningen, 1996 [dernière mise à jour en 2001], <http://odur.let.rug.nl/~usa/B/hamilton/hamilxx.htm>.
- FISHBURN P.C., « The Irrationality of Transitivity in Social Choice », *Behavioral Science* 15, 1970, p. 119-123.
- FISHBURN P.C., « Paradoxes of voting », *The American Political Science Review* 68, 1974, p. 537-546.

- GEHRLEIN W.V., « Condorcet's paradox and the Condorcet efficiency of voting rules », *Mathematica Japonica* 45(1), 1997, p. 173-199.
- GEHRLEIN W.V., « Condorcet's paradox and the likelihood of its occurrence: different perspectives on balanced preferences », *Theory and Decision* 52, 2002, p. 171-199.
- GIBBARD A.F., « Manipulation of voting schemes: a general result », *Econometrica* 41, 1973, p. 587-601.
- GUILBAUD G.Th., « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Économie appliquée* 5(4), 1952, [repris dans *Éléments de la théorie des jeux*, Paris, Dunod, 1968].
- HARARY F., NORMAN R.Z. et CARTWRIGHT D., *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*, New York, Wiley, 1965.
- LAGERSPETZ E., « Pufendorf on Collective Decisions », *Public Choice* 49(2), 1986, p. 179-182.
- LAGERSPETZ E., « Paradoxes and Representation », *Electoral Studies* 15(1), 1995, p. 83-92.
- LAPLACE (marquis de) P. S., *Journal de l'École polytechnique*, tome II, vol. 7 et 8, 1795, [repris dans *Théorie analytique des probabilités* et dans *Essai philosophique sur les probabilités*]. Voir *Œuvres de Laplace*, édition nationale, tome VII, Paris, 1847.
- LASLIER J.-F. et VAN DER STRAETEN K., « Élection présidentielle : une expérience pour un autre mode de scrutin », *Cahiers du Laboratoire d'économétrie de l'École polytechnique* 2003-007, 2003.
- LHUILIER S., *Examen du mode d'élection proposé à la Convention nationale de France en février 1793 et adopté à Genève*, Genève, 1794, [reproduit dans *Mathématiques et Sciences humaines* 54, 1976].
- MASCART J., *La vie et les travaux du chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799)*, Annales de l'Université de Lyon, 1919, [réédition aux Presses de l'Université de Paris-Sorbonne, 2000].
- McLEAN I., « The Borda and Condorcet principles: three medieval applications », *Social Choice and Welfare* 7, 1990, p. 99-108.
- McLEAN I. et URKEN A. (sous la direction de), *Classics of Social Choice*, The University of Michigan Press, 1995.
- MAY R.M., « Some mathematical remarks on the paradox of voting », *Behavioral Science* 16, 1971, p. 143-151.
- MERLIN V., « The axiomatic characterization of majority voting and scoring rules », *Mathématiques et Sciences humaines* 163, 2003, p. 87-109.
- MIMIAGUE F. et ROUSSEAU J.-M., « Effet Condorcet : typologie et calculs de fréquences », *Mathématiques et Sciences humaines* 43, 1973, p. 7-27.
- MONJARDET B., « Lhuilier contre Condorcet, au pays des paradoxes », *Mathématiques et Sciences humaines* 54, 1976, p. 33-43.
- MONJARDET B., « De Condorcet à Arrow via Guilbaud, Nakamura et les "jeux simples" », *Mathématiques et Sciences humaines* 163, 2003, p. 41-68.

MOULIN H., « Fairness and strategy in voting », in *Fair Allocation*, sous la direction de H. P. Young, American Mathematical Society, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 33, 1985, p. 109-142.

MOULIN H., « Condorcet's principle implies the no show paradox », *Journal of Economic Theory* 45, 1988, p. 53-64.

NURMI H., *Voting paradoxes and how to deal with them*, Springer, 1999.

PERNY P. et JURET X., « Sur la monotonie des procédures de décision par choix itérés », séminaire *Mathématiques discrètes et Sciences sociales*, Paris, CAMS-EHESS, 2001.

SAARI D., « A dictionary for voting paradoxes », *Journal of Economic Theory* 48, 1989, p. 443-475.

SAARI D., « Millions of election outcomes from a single profile », *Social Choice and Welfare* 9, 1992, p. 227-306.

SAARI D., *Geometry of voting*, Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 1994.

SATTERTHWAITE, M.A., « The existence of a strategy proof voting procedure: a topic in social choice theory », thèse de doctorat de l'université du Wisconsin, Madison, États-Unis, 1973.

SATTERTHWAITE, M.A., « Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondences for voting procedures and social welfare functions », *Journal of Economic Theory* 10, 1975, p. 187-217.

STAVELY, E.S., *Greek and Roman voting and elections*, Thames and Hudson, 1972.

WEYMOUTH L., *Thomas Jefferson: The Man, His World, His Influence*, G.P. Putnam and sons, 1973.