

PHYSIQUE STATISTIQUE DE PHÉNOMÈNES COLLECTIFS EN SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

Jean-Pierre NADAL¹, Mirta B. GORDON²

RÉSUMÉ – *L’objet de cet article est de montrer comment la physique statistique peut contribuer à la modélisation de phénomènes collectifs en sciences économiques et sociales. Le coeur de l’exposé porte sur le comportement global d’un groupe de grande taille lorsque les décisions individuelles sont influencées par celles des autres. Nous illustrons notre propos par plusieurs exemples, en partant de travaux pionniers en sociologie et économie, comme ceux de T. Schelling, dont l’approche de ces problèmes a toute la saveur de celle d’un physicien.*

MOTS CLÉS – Choix discrets avec externalités, Émergence, Influence sociale, Phénomènes collectifs, Physique statistique, Schelling.

SUMMARY – STATISTICAL PHYSICS OF COLLECTIVE PHENOMENA IN SOCIAL AND ECONOMIC SCIENCES

This article shows how statistical physics may contribute to the modelling of collective phenomena in economics and social science. The main topic here is the study of the global (aggregate) behavior of a large population, when the agents make choices under social influence. We present several examples, starting from pioneering works in economics and sociology, such as those of T. Schelling whose approach has all the flavour of physicists’ approaches.

KEYWORDS – Collective phenomena, Discrete choices with externalities, Emergence, Social influence, Schelling, Statistical physics.

1. INTRODUCTION

Cela a-t-il un sens d’établir une analogie entre le comportement d’un matériau magnétique comme un aimant et celui d’un ensemble d’individus rationnels devant faire un choix ou prendre une décision ? S’il y en a une, elle ne saute pas aux yeux, ou si on la devine elle semble *a priori* naïve. Pourtant, vers la fin des années 70, Thomas Schelling, économiste, sociologue et politologue, utilisait des analogies avec les phénomènes physiques pour modéliser des faits stylisés en sciences sociales. Dans son livre [Schelling, 1978], dont le titre en français est *La tyrannie des petites décisions*, il montre comment certains phénomènes, dits de masse critique, peuvent être modélisés avec des approches empruntées à la Physique. Ainsi, il montre comment

¹Laboratoire de Physique Statistique (UMR 8550 CNRS, ENS, Universités Paris 6 et Paris 7), École Normale Supérieure, 24 rue Lhomond 75231 Paris cedex 05, nadal@lps.ens.fr

²Laboratoire Leibniz-IMAG (UMR 5522 CNRS, UJF et INPG), 46 avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble cedex 1, mirta.gordon@imag.fr

une population qui ne se considère pas comme foncièrement raciste, mais où chaque individu ne voudrait pas se trouver dans une trop faible minorité raciale, évolue vers un état de ségrégation complète. Un autre pionnier, le sociologue Mark Granovetter, s'appuie sur les travaux de Schelling pour discuter des mouvements collectifs « spontanés », comme la formation d'émeutes [Granovetter, 1978].

Divers domaines des sciences sociales, en particulier en sociologie et en économie, ont emprunté des modèles de la Physique. Une question qui est posée dans ces domaines est celle de l'émergence d'un état collectif de la société à partir de l'agrégation de décisions individuelles qui, en principe, ne sont pas coordonnées volontairement. Ceci va des effets de mode à l'adoption de normes sociales, ou à la formation de marchés.

Le titre original du livre déjà cité de Schelling, *Micromotives and Macrobehavior*, évoque inévitablement pour un physicien l'expression *From microphysics to macrophysics*, qui est aussi le titre d'un livre de cours de mécanique statistique [Balian, 1992] : la mécanique (ou physique) statistique est en effet la discipline qui cherche à rendre compte des états et du comportement de la matière à un niveau « macro » (typiquement ceux de la matière telle que nous l'observons à l'échelle humaine : par exemple solide, liquide, gazeuse), à partir d'un niveau « micro », c'est-à-dire d'une description des propriétés élémentaires du très grand nombre de ses constitutants (de l'ordre de 10^{23} atomes par gramme). L'objet de cet article est de montrer, en partant des travaux de Schelling, comment les outils et concepts issus de la mécanique statistique peuvent être exploités au profit de l'analyse de certaines situations d'intérêt en sciences économiques et sociales, tout particulièrement lorsqu'il s'agit de considérer des groupes sociaux de très grande taille.

2. FAITS STYLISÉS

Une grande diversité de phénomènes économiques et sociaux dépendant fortement des interactions sociales montrent des propriétés similaires, quant à leurs dynamiques et états stationnaires ou équilibres. Comme cela est bien analysé dans Ehrhardt *et al.* [2004], qu'il s'agisse, par exemple, de la transformation d'un quartier en ghetto, du développement de la criminalité, de l'implantation d'industries spécialisées dans une région, de phénomènes de mode, de l'adaptation d'un standard, etc., on observe les trois faits caractéristiques suivants.

- transitions abruptes : le passage d'un état à un autre se fait souvent de manière très rapide dans le temps (penser à la dégradation d'un quartier, à la rapidité de l'adoption d'un standard) ;
- robustesse : une fois le nouvel état installé, il se révèle très robuste. Cette forme d'homéostasie est parfois dénommée « résilience », du moins pour les situations agréables : capacité d'un écosystème à se remettre plus ou moins vite d'une perturbation, ou, en économie, capacité intrinsèque des entreprises, des organisations et des communautés à retrouver un état d'équilibre – soit leur état initial, soit un nouvel équilibre – qui leur permette de fonctionner après un désastre ou dans un environnement dynamique et changeant [Collin, 1999]. Mais de telles propriétés de stabilité s'observent

aussi, malheureusement, dans des cas moins sympathiques : stabilité des réseaux mafieux, permanence des ghettos...

– coexistence d'équilibres : malgré des conditions économiques et sociales similaires, des équilibres différents peuvent être observés. C'est par exemple le cas de la dégradation ou non de quartiers dans une même ville. Robustesse et coexistence sont les ingrédients essentiels responsables d'un phénomène d'hystéresis, comme on le verra plus loin.

Ces propriétés évoquent pour un physicien celles associées aux transitions de phases discontinues, dites « du premier ordre », ou celles d'une bifurcation « saddle-node » d'un système dynamique : il s'agit de systèmes tels que, lorsqu'on change continûment un paramètre en partant d'une valeur pour laquelle il n'existe qu'un état d'équilibre, on atteint une valeur critique à la quelle apparaît un deuxième équilibre. Ces deux équilibres coexistent pour toute une gamme de valeurs du paramètre. Lequel des deux équilibres est réalisé en pratique dépend de l'histoire du système, et n'est pas prévisible *a priori*. On trouvera dans [Ball, 2003] une revue de diverses situations pour lesquelles une analogie avec la physique semble pertinente.

De tels phénomènes se produisent de manière générique dans le cas de systèmes d'agents hétérogènes en interaction. Nous allons nous intéresser plus spécialement à la modélisation de situations où le choix de chaque individu dépend de préférences qui lui sont propres mais est aussi influencé par le choix des autres, comme par exemple :

- choisir tel logiciel plutôt que tel autre pour pouvoir bénéficier de l'expérience de ses voisins qui font le choix du même logiciel ;
- voir un film plutôt qu'un autre, pour aller au cinéma avec des amis plutôt que seul ;
- acheter un téléphone portable même si on n'apprécie pas trop ce mode (entre autres coûteux) de communication, pour pouvoir rester en contact avec sa tribu ;
- aller à une conférence au prix d'inscription élevé du fait de la perspective d'y rencontrer des collègues éminents ;
- dépasser la limitation de vitesse sous prétexte que les autres le font ; etc.

Un des cas les plus simples est celui décrit par Schelling, dans son modèle du « Séminaire mourant », modèle développé ensuite par Granovetter pour décrire la formation d'émeutes.

3. LE SÉMINAIRE MOURANT

Considérons la situation suivante, analysée par Schelling [1978] : une communauté de N chercheurs très intéressés par un sujet nouveau, décide d'organiser un séminaire tous les samedis, jour peu propice mais où personne n'a d'empêchement de principe. Est-ce que ce séminaire aura du succès au cours du temps, ou va finir par disparaître par manque d'assistants ? Schelling suppose que chaque individu possède un seuil ou masse critique, dénoté n_i : il n'assistera au séminaire que si cette masse critique de participants est atteinte. Ainsi, compte tenu du nombre de participants du samedi précédent, $n(t-1)$, il décide d'assister seulement si ce nombre est supérieur ou

égal à son seuil. Le résultat de cette dynamique dépend *a priori* des valeurs des seuils $\{n_i, i = 1, \dots, N\}$. En fait, il ne dépend qualitativement que de la forme de la distribution de ces seuils, et on peut distinguer essentiellement trois cas, illustrés sur la Figure 1. Considérons d'abord sur cette figure la courbe la plus haute, A . Cette courbe donne un exemple de distribution cumulée des seuils : pour chaque valeur de n en abscisse, on a porté en ordonnée la fraction d'individus $\eta = F(n)$ dont le seuil n_i est au plus égal à n . Ainsi $NF(0)$ est le nombre d'individus qui sont satisfaits d'aller au séminaire même s'ils s'y retrouvent seuls, $NF(1)$ est le nombre d'individus qui participent au séminaire même s'il n'y a pas plus d'un participant en plus d'eux-mêmes, etc. On peut avoir $F(N) < 1$ si pour certains chercheurs $n_i > N$: ceux là n'iront jamais au séminaire, le groupe complet étant trop petit pour eux. Supposons maintenant qu'au t ème samedi un certain nombre $n(t)$ est présent au séminaire. Tous ceux pour qui $n(t) \geq n_i$ iront au séminaire en $t + 1$, autrement dit

$$n(t + 1) = NF(n(t)). \quad (1)$$

L'itération de cette dynamique, qu'on peut réaliser graphiquement comme sur la Figure 2, va conduire à un point fixe, un état stable, pour une certaine valeur n^* vérifiant

$$n^* = NF(n^*) \quad (2)$$

et qui est donc l'un des points d'intersection de la courbe $\eta = F(n)$ avec la droite $\eta = n/N$. Dans le cas A de la Figure 1, les courbes $\eta = F(n)$ et $\eta = n/N$ ne se coupent qu'en un point, pour une valeur élevée de n : l'assistance au séminaire se stabilise avec une forte participation.

Dans le cas B , on a également un seul point fixe, avec n^* petit : le séminaire est quasi mourant, l'assistance reste très faible.

Le cas intermédiaire C est le plus intéressant : la courbe $\eta = F(n)$ coupe trois fois la droite $\eta = n/N$. Comme le montre l'itération de la dynamique illustrée graphiquement dans ce cas, sur la Figure 3, selon le nombre de participants lors du premier séminaire, l'assistance va soit converger vers le point fixe bas (séminaire mourant), soit converger vers le point fixe haut (forte participation). L'intersection des deux courbes à une valeur intermédiaire de n correspond à un point fixe instable (toute déviation de ce point conduit à converger vers l'un des deux points fixes stables). On a donc coexistence de deux équilibres stables.

On a déjà ici quelques propriétés essentielles d'une dynamique collective : la population peut adopter un comportement stable avec des choix individuels qui dépendent eux-mêmes des choix des autres. On peut avoir plusieurs états stables, et la dynamique va conduire le groupe vers tel ou tel équilibre stable en fonction des conditions initiales.

Considérons maintenant l'évolution du comportement du groupe (séminaire mort ou vivant) lorsque pour une raison quelconque la distribution des seuils individuels change. Par exemple, supposons qu'on parte d'une situation de type B , avec un état stable correspondant à un séminaire avec presque pas de participants. Imaginons que l'intérêt pour le thème du séminaire augmente, de sorte que tous les seuils de la plupart des chercheurs diminuent : dès lors la courbe $\eta = F(n)$ « monte » (dans la

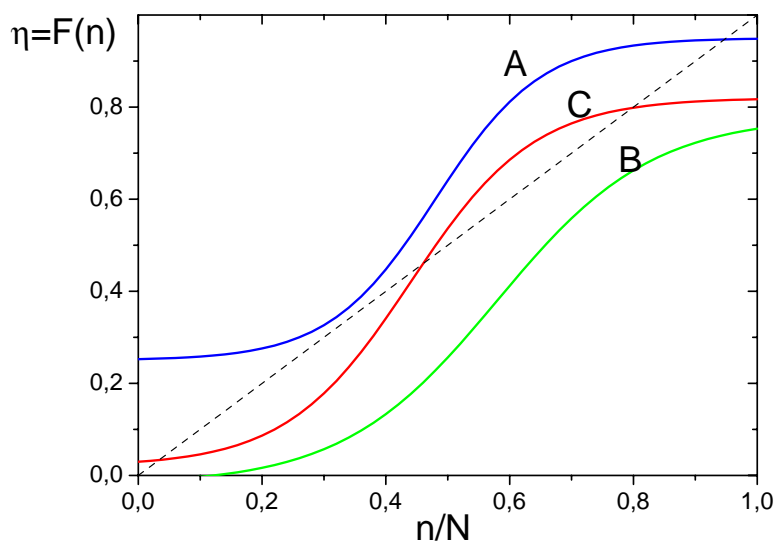


FIG. 1. Le Séminaire mourant. Les courbes A, B et C représentent différents exemples de distributions cumulées $F(\cdot)$ des seuils de décision n_i . Autrement dit une courbe $\eta = F(n)$ donne la fraction d'individus décidés à assister au séminaire même si le nombre de participants n'est pas plus grand que n ($0 \leq n \leq N$).

nouvelle situation, pour un n donné plus de chercheurs sont prêts à participer), au point qu'on peut éventuellement se trouver avec une courbe de type C : on a toujours un point fixe avec une faible assistance, mais un nouveau point fixe, correspondant à une forte assistance, apparaît brutalement. Cependant, si la dynamique du groupe est régie par l'équation d'évolution (1), le groupe « ne voit pas » que le séminaire peut renaître, et reste piégé dans l'équilibre bas (c'est la robustesse, ou résilience, mentionnée plus haut). Si les masses critiques (ou seuils) des individus diminuent davantage, à un moment on va tout à coup passer à une situation de type A : le point fixe bas disparaît, et la dynamique conduit très rapidement le groupe au point fixe haut, le seul qui soit maintenant stable.

Si maintenant au contraire l'intérêt pour le sujet diminue, de sorte que les seuils individuels augmentent, on va repasser à une situation de type C , avec ré-apparition soudaine du point fixe bas, puis à une situation de type B , avec uniquement le point fixe bas. Mais de manière symétrique à la discussion précédente, ce n'est que lorsque le point fixe haut disparaît ($C \rightarrow B$) que le groupe quitte le point fixe haut pour le point fixe bas. On a un exemple de phénomène d'hysteresis du fait de la coexistence entre deux équilibres stables.

Les passages $A \leftrightarrow C$ ou $B \leftrightarrow C$ sont des analogues de transitions de phases dans les systèmes physiques :

- le comportement collectif est caractérisé par un « paramètre d'ordre » (ici la fraction des chercheurs qui assistent au séminaire); dans des cas plus complexes le paramètre d'ordre peut être un objet multi-dimensionnel (par exemple un vecteur),

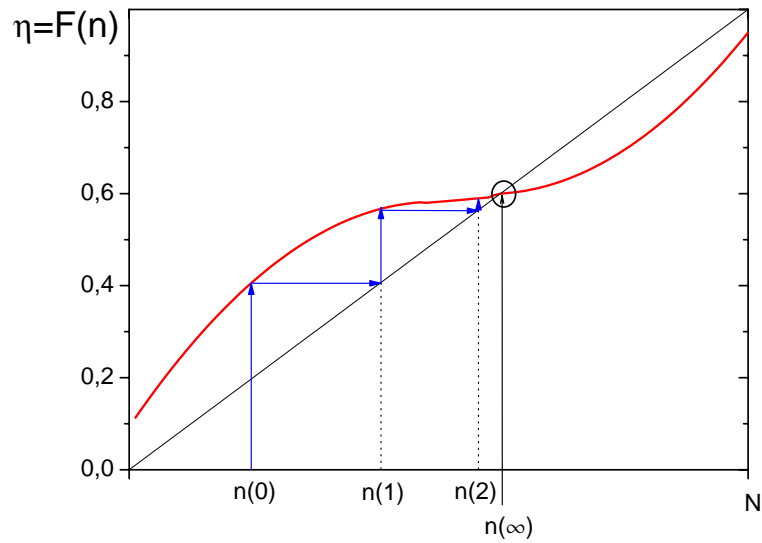


FIG. 2. Le Séminaire mourant. L'évolution de l'assistance au séminaire peut se décrire à l'aide de la courbe $\eta = F(n)$. Sur cet exemple - correspondant aux types A et B de la figure (1) -, l'intersection unique avec la diagonale $\eta = n/N$ donne la fraction d'individus qui assisteront régulièrement au séminaire (point fixe stable de la dynamique).

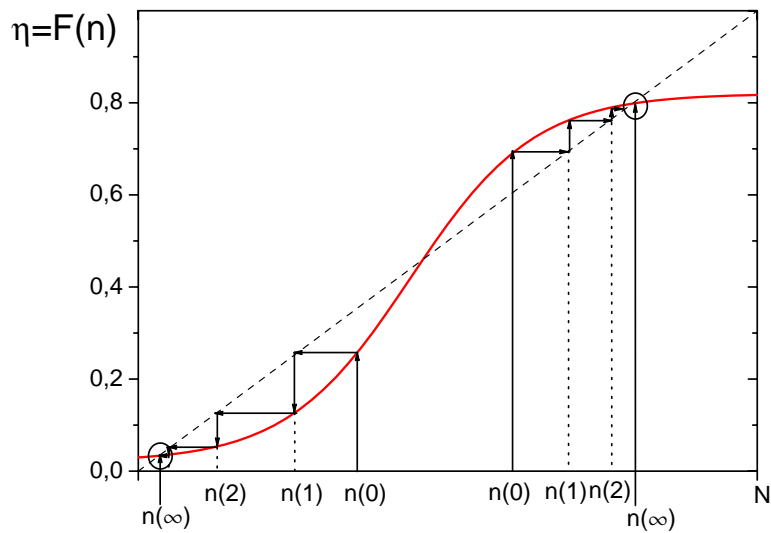


FIG. 3. Le Séminaire mourant. Exemple correspondant au type C de la figure (1) : la dynamique a deux points fixes stables, l'un avec très peu de participants (séminaire 'mort'), l'autre avec une forte assistance.

voire une distribution de probabilité [Mézard, Parisi, Virasoro, 1987] ;

– on peut définir un petit nombre de « phases », c'est-à-dire de régimes où le paramètre d'ordre présente un comportement qualitativement similaire (ici une phase avec un séminaire quasi-mort, une phase avec un séminaire vivant, et un régime avec co-existence de ces deux phases) ;

– les transitions d'une phase à une autre peuvent se faire avec une variation continue du paramètre d'ordre (on parle alors de transition du 2nd ordre), ou comme c'est le cas ici de manière discontinue (on parle alors de transition du 1er ordre) : le paramètre d'ordre a une discontinuité (ici, par exemple, le nombre de participants saute d'une valeur basse à une valeur haute) lorsqu'on passe d'une phase à l'autre.

Une remarque cependant. Nous avons considéré une dynamique déterministe des individus. Pour une dynamique stochastique (les agents décidant de venir avec une probabilité d'autant plus grande que le nombre de participants est plus grand que leur seuil n_i), les conclusions seraient qualitativement les mêmes que dans le cas déterministe à la condition d'avoir un très grand nombre d'agents ($N \rightarrow \infty$). Pour un petit nombre d'individus, en dynamique stochastique, la proportion de participants, $\eta(t) = n(t)/N$, est une variable ayant de fortes fluctuations d'un instant t à l'autre. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, un 'ordre' apparaît, $\eta(t) = n(t)/N$ devenant un nombre quasi constant (avec des fluctuations d'ordre $1/\sqrt{N}$). On parlera de « phénomène collectif » à chaque fois qu'un tel ordre (« macroscopique ») apparaît malgré le « bruit » au niveau (« microscopique ») des individus. C'est dans cette limite des grands systèmes, en présence de fonctions de choix stochastiques, que l'analogie avec la physique prend tout son sens. Föhlmer [1974] a été sans doute le premier à formaliser une notion d'équilibre économique pour des agents en interaction, directement inspirée de l'équilibre d'un système physique.

De manière analogue, l'existence d'hétérogénéités (dans le cas du Séminaire, le fait que les seuils des agents n_i ne soient pas identiques) ne permet pas de prédire grand chose dans le cas d'un petit nombre d'agents. Dans la limite $N \rightarrow \infty$, on va de nouveau trouver « un ordre », les quantités d'intérêt prenant des valeurs « presque sûres », qui ne dépendent que de la distribution de probabilité des variables hétérogènes et non pas de la réalisation particulière des ces variables dans la population – et c'est très exactement ce que nous avons vu ci-dessus dans le cas du Séminaire mourant. On va trouver là encore des liens potentiellement prometteurs avec la physique statistique, celle des « systèmes désordonnés » (autrement dit fortement hétérogènes) qui sont l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques depuis plus de vingt ans [Mézard, Parisi, Virasoro, 1987], [Talagrand, 2003].

La discussion de cette section peut être reprise et développée avec un point de vue économique plutôt que sociologique, ce que nous faisons ci-après, en discutant un modèle qui permet de mettre davantage en évidence les liens entre modèles économiques et modèles de la physique statistique des systèmes désordonnés, et de discuter ainsi l'apport potentiel de la physique à l'analyse des phénomènes collectifs en sciences économiques et sociales.

4. CHOIX DISCRETS AVEC EXTERNALITÉS

4.1. CADRE GÉNÉRAL

Nous nous plaçons dans le cadre général de la théorie des choix discrets, en nous limitant au cas de choix binaires (« acheter/ ne pas acheter », « coopérer/ trahir », « participer/ne pas participer »...), en présence « d'externalités » : l'utilité pour un agent dépend du choix d'autres agents. De manière plus précise :

- Nous considérons une population de N agents ($i = 1, 2, \dots, N, N \gg 1$);
- Chaque agent i doit faire un choix, noté ω_i . Ce choix correspond à la décision d'effectuer ($\omega_i = 1$) ou non ($\omega_i = 0$) une certaine action, comme par exemple acheter ou non un produit – auquel cas nous considérons un marché avec un seul produit homogène, vendu à l'unité, par un seul vendeur (situation de monopole).
- Le coût du choix $\omega_i = 1$ est P : prix d'une unité du bien mis en vente, équivalent monétaire du risque associé au passage à l'acte, etc. Dans certaines situations, P est négatif : $-P$ est alors un gain, comme par exemple la subvention accordée par un gouvernement aux entreprises i qui acceptent d'adopter une mesure ($\omega_i = 1$) destinée à réduire la pollution.
- Chaque agent a des préférences H_i qui lui sont propres (idiosyncratiques) ; plus H_i est grand, plus la volonté de faire le choix $\omega_i = 1$ est grande. Dans le cas du marché, c'est le prix de réserve de l'agent : l'agent achète si le prix P est au plus égal à H_i . Cette variable H_i peut être négative pour certains agents, au quel cas $|H_i|$ s'interprète comme la somme minimale qu'il faut donner à l'agent pour qu'il accepte de prendre la décision $\omega_i = 1$ (voir l'exemple des incitations aux entreprises mentionné ci-dessus). La variable H_i peut aussi s'interpréter comme quantifiant une information privée de l'agent i , biaisant son choix en faveur ($H_i > 0$) ou contre ($H_i < 0$) l'adoption.
- La situation est plus intéressante (et certainement plus réaliste) si l'on tient compte des influences sociales. On suppose donc que le choix de chaque agent est influencé par celui des autres, ou, plus généralement, s'il n'a pas accès à cette information, par ses croyances $\hat{\omega}_j^i$ sur le choix d'autres agents $j \in \nu(i)$, où $\nu(i)$ désigne le sous ensemble d'agents ayant une influence sur i (voisins, amis, collègues,...). Le poids de l'influence de j sur i est dénoté J_{ij} : le prix de réserve de l'agent i est augmenté de J_{ij} si $\hat{\omega}_j^i = 1$. Toutes les situations évoquées jusqu'ici concernent des effets de diffusion et de mimétisme, c'est-à-dire des cas avec influences positives : $J_{ij} \geq 0$. Cependant dans d'autres cas les J_{ij} peuvent aussi bien être positifs que négatifs (vous ne voulez pas aller au séminaire avec certains de vos collègues, un jeune voudra adopter la même attitude vestimentaire que ses amis mais surtout pas celle de ses parents, etc.).
- Finalement nous pouvons écrire le surplus V_i obtenu par l'agent i s'il adopte ($\omega_i = 1$), comme :

$$V_i[\{\hat{\omega}_j^i, j \in \nu(i)\}] = H_i + \sum_{j \in \nu(i)} J_{ij} \hat{\omega}_j^i - P \quad (3)$$

et l'agent i , s'il est rationnel, adopte si $V_i > 0$. Autrement dit l'agent prend la

décision $\omega_i^* \in \{0, 1\}$ qui maximise l'utilité :

$$U_i[\omega_i | \{\widehat{\omega}_j^i, j \in \nu(i)\}] = \omega_i V_i \quad (4)$$

$$\omega_i^* = \arg \max_{\omega_i} U_i[\omega_i | \{\widehat{\omega}_j^i, j \in \nu(i)\}]. \quad (5)$$

Limitons nous à l'analyse des équilibres du modèle dans lesquels on aura adéquation des attentes avec les choix réalisés :

$$\sum_{j \in \nu(i)} J_{ij} \widehat{\omega}_j^i = \sum_{j \in \nu(i)} J_{ij} \omega_j, \quad \text{pour tout } i \quad (6)$$

On a donc :

$$U_i[\omega_i | \{\omega_j, j \neq i\}] = \omega_i [H_i + \sum_{j \in \nu(i)} J_{ij} \omega_j - P] \quad (7)$$

et les choix optimaux sont solutions de :

$$\omega_i^* = \arg \max_{\omega_i} U_i[\omega_i | \{\omega_j^*, j \neq i\}], \quad , i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Un tel équilibre sera potentiellement atteint si on considère une dynamique similaire à celle vue dans le cas du Séminaire mourant : à chaque instant t tout agent i a accès à l'information complète sur les choix des autres, et par un comportement « myope » (car il n'a pas besoin d'anticipation), il prend pour faire son choix à l'instant $t + 1$, $\widehat{\omega}_j^i(t + 1) = \omega_j(t)$. Mais ces conditions (7, 8) sont aussi d'intérêt plus général, caractérisant tous les équilibres possibles conformes aux attentes des agents. De fait les conditions (8) définissent les *équilibres de Nash* du système. Pour une présentation plus complète, voir [Phan, Gordon, Nadal, 2004].

4.2. MAIN TREMBLANTE ET BRUIT THERMIQUE

Du point de vue psychologique [Thurstone, 1927], on peut envisager aussi que si les agents doivent faire des choix répétés, leurs décisions suivent des règles non déterministes. Pour les économistes, l'agent, même rationnel, peut avoir « la main tremblante » : il lui arrive alors de prendre une mauvaise décision, soit par erreur ou pour tester ses conséquences. Formellement, l'individu fait un choix stochastique dans lequel il choisit $\omega_i = 1$ avec une probabilité d'autant plus grande que V_i est plus grand. Ceci peut par exemple se formaliser avec la fonction de choix « logit » :

$$Prob(\omega_i = 1) = \frac{1}{1 + \exp -V_i/T} \quad (9)$$

Pour $T \rightarrow 0$, on retrouve la décision déterministe correspondant à l'équation (8). Cette forme particulière peut se justifier avec un point de vue d'inférence statistique, car l'utilité dépend d'une estimation de ce que d'autres agents vont faire. La règle de décision (9) peut s'interpréter comme le résultat d'un compromis exploration/exploitation [Nadal, Weisbuch, Chenevez, Kirman, 1998] : lorsque le gain

d'une action n'est pas connu exactement, l'agent doit soit exploiter ce qu'il sait déjà (prendre la décision qui maximise l'utilité espérée), soit explorer (prendre une autre décision pour avoir la possibilité de réviser ses croyances).

La forme particulière (9) est d'emploi fréquent en théorie économique. Elle permet de faire en outre une analogie avec la physique, dans laquelle T est la température du système considéré. Une notion d'équilibre cohérente avec la règle de décision (9) est alors, nécessairement, définie par un état stationnaire (une mesure invariante). Dans le cas où les influences sociales sont symétriques ($J_{ij} = J_{ji}$ pour toute paire de voisins i, j , avec évidemment $J_{ii} = 0$ – on ne s'influence pas soi-même ! –), cet équilibre est l'analogue de l'équilibre thermodynamique à la température T , pour lequel on a :

$$Prob(\vec{\omega} \equiv \{\omega_i, i = 1, \dots, N\}) = \frac{1}{Z} \exp(-E[\vec{\omega}] / T) \quad (10)$$

où $\vec{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ – dont les composantes sont les décisions des agents – décrit l'état du système, Z est une constante de normalisation et E , analogue d'une énergie en physique, est défini par :

$$E[\vec{\omega}] = - \sum_i \omega_i (H_i - P) - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \omega_i \omega_j \quad (11)$$

Clairement, les configurations $\vec{\omega}$ les plus probables à l'équilibre stationnaire sont celles de plus basse « énergie ». Dans le cas déterministe (limite $T \rightarrow 0$) les configurations correspondant à des équilibres de Nash (8) sont précisément celles qui minimisent « l'énergie » E . Il est intéressant de noter que :

1. l'optimisation d'un critère global ($\min E[\vec{\omega}]$) peut résulter de choix individuels interdépendants mais non coordonnés ;
2. naïvement on aurait pû s'attendre à ce que la quantité optimisée au niveau collectif soit l'utilité globale \mathcal{U} , définie par :

$$\mathcal{U} \equiv \sum_i U_i = \sum_i \omega_i (H_i - P) + \sum_{i,j \in \nu(i)} J_{ij} \omega_i \omega_j, \quad (12)$$

auquel cas on aurait eu $\mathcal{U} = -KE$, avec K une constante de proportionalité positive ($K > 0$). Or, comme le montre l'expression (11), ceci n'est pas le cas, sauf dans les cas très particuliers d'absence d'interactions ($J_{ij} = 0$ pour tout i, j) ou si $H_i - P = 0$ pour tout i .

3. l'équilibre décrit par (10) est proche, mais différent, de ce qui s'appelle en économie le « Quantal Response Equilibrium » (QRE) [McFadden, 1976]. Ce dernier correspond à supposer que les agents décident de manière probabiliste avec une loi similaire à (10), mais avec dans l'exponentielle l'espérance de leurs gains. De ce fait, QRE est similaire à ce qu'on obtiendrait en remplaçant (10) par une approximation de type « champ moyen ».

4.3. MODÈLES D'ISING ET CHOIX DISCRETS

Les modèles dits d'Ising représentent une large classe de systèmes, dont le plus simple est celui introduit initialement par Ising pour décrire le phénomène du ferromagnétisme : dans certains matériaux, les moments magnétiques quantiques, ou « spins », des atomes sont sujets à des interactions positives entre atomes voisins, aboutissant à température suffisamment basse à aligner un ensemble macroscopique de spins, d'où une aimantation observable – autrement dit le matériau se comporte comme un aimant. La nature quantique des moments magnétiques individuels fait qu'il est suffisant, dans une approche très simplifiée, de ne considérer que l'orientation S_i du spin d'un atome i selon un axe : $S_i = +1$ (« vers le haut ») ou $S_i = -1$ (« vers le bas »). Cette variable d'Ising S_i est l'analogue de la variable de choix discret, et on passe du formalisme économique $\omega_i \in \{0, 1\}$ au formalisme physique $S_i \in \{-1, +1\}$ par un simple changement de variable, $S_i = 2\omega_i - 1$. Les interactions entre spins sont représentées par des poids $J_{ij} = J_{ji}$ symétriques en raison du principe d'action et réaction. H_i est un champ magnétique local qui est soit appliqué de l'extérieur du matériau (alors généralement on a $H_i = H$ pour tout i), soit produit par des ions magnétiques distribués au sein même du matériau (dans ce cas le champ H_i peut varier d'un site à l'autre).

Dans le cas de choix discrets non binaires ($\omega_i \in \{0, 1, 2, \dots, Q - 1\}$), on trouve encore un analogue en physique, les « modèles de Potts » à Q états, généralisation des modèles d'Ising. L'essentiel des propriétés seront similaires à celles des systèmes à choix binaires, avec des différences qu'on ne discutera pas ici. La classe générale de tous ces modèles est aussi étudiée par les mathématiciens qui, pour travailler en dehors de tout contexte physique, l'ont rebaptisée « Champs de Markov aléatoires » (*Random Markov Fields* [Kindermann, Snell, 1980]) – où *champ* désigne ici les variables d'état S_i –, l'aléa – le bruit thermique du point de vue physique – résultant de la règle de choix stochastique (9). Dans son travail de pionnier, Föllmer [1974] a utilisé le langage des Champs de Markov aléatoires pour étudier un équilibre économique défini de manière analogue à (10).

Reprenons notre modèle défini par les utilités (7). Suivant les différents contextes dans lesquels ils sont énoncés, ces modèles supposent différents degrés de connaissance de la part du modélisateur. Pour une population de grande taille, il est légitime de considérer que celui-ci ne connaît pas les valeurs particulières des préférences idiosyncratiques H_i mais peut préciser la distribution de celles-ci dans la population : on pourra alors considérer que les $\{H_i, i = 1, \dots, N\}$ sont N variables aléatoires indépendantes de même loi $\rho(\cdot)$, laquelle est supposée connue. Notre modèle est alors un exemple de « modèle à utilité aléatoire » (*Random Utility Model*, **RUM** [Manski, 1977], [McFadden, 1976]) avec externalités. Mais cette famille de modèles a aussi des analogues en physique des systèmes magnétiques. Ainsi, pour des interactions homogènes, le RUM avec externalités est l'analogue du « modèle d'Ising en champ aléatoire » (*Random Field Ising Model*, **RFIM** [Galam, Aharony, 1980], [Sethna *et al.*, 1993]). Une situation avec préférences idiosyncratiques homogènes ($H_i = H$ pour tout i), mais interactions hétérogènes, est l'analogue des modèles de « verres de spins » (*Ising spin models*) [Mézarid, Parisi, Virasoro, 1987].

Même si l'ensemble des connaissances accumulées sur ces systèmes est conséquent, l'analyse complète de tels modèles reste, en général, très difficile, y compris dans le cas de systèmes homogènes. Ainsi, considérons le cas particulier de spins/agents sur un réseau régulier à maille carrée en 2 dimensions, avec interactions uniquement entre plus proches voisins et homogènes ($J_{ij} = J > 0$ pour i, j premiers voisins sur le réseau et 0 sinon), et un champ extérieur homogène, $H_i = H$: l'analyse exacte du modèle n'est faite que pour $H = 0$, et représente un tour de force du physicien Onsager [1944]. La situation la plus simple à analyser est celle, dite de « champ moyen », d'un voisinage global, c'est-à-dire où tout agent interagit avec tout autre agent. Mais cette simplicité n'existe pratiquement que pour les cas d'interactions homogènes ($J_{ij} = J > 0$ pour toute paire i, j). L'étude de systèmes avec interactions hétérogènes, même avec un voisinage global, est en général d'une grande complexité, sujet de travaux majeurs en physique théorique et mathématique [Mézard, Parisi, Virasoro, 1987], [Talagrand, 2003].

L'un des enseignements de ces travaux est la pertinence de la distinction entre un aléa des choix dû aux hétérogénéités des paramètres (les H_i et/ou J_{ij}), et un aléa dû à la nature probabiliste des choix des agents, comme celui défini en (9). Ainsi, supposons une population homogène (pour tout i , $H_i = H$ et $J_{ij} = J$ pour tout j voisin de i), avec pour chaque agent la prise de décision selon (9). Un observateur constatera à un instant donné, une fois que l'équilibre stationnaire du système est atteint, une certaine distribution des choix non homogène, reflétant simplement la loi de probabilité (9).

À première vue, cet état ne sera pas distinguable de l'état d'équilibre qu'on observera pour une population d'agents rationnels (choix déterministes) avec les mêmes interactions homogènes, mais des dispositions à adopter H_i hétérogènes, distribuées dans la population selon une loi de type « logit », $Prob(H_i - H < z) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta z)}$, avec H la valeur moyenne des H_i dans la population et $\beta = 1/T$. Cependant, l'aléatoire spatial (hétérogénéité des préférences des agents) et l'aléatoire temporel (choix aléatoire à chaque instant) induisent au niveau collectif des effets différents, aussi bien sûr la détermination des équilibres que sur la dynamique [Mézard, Parisi, Virasoro, 1987], [Sethna *et al*, 1993]. Dans les situations les plus simples (voisinage global pour les interactions), on pourra avoir le même ensemble d'équilibres possibles, mais même dans ce cas la mesure de Boltzmann-Gibbs (10) donne des probabilités d'observation des équilibres différentes dans les deux cas, rendant même certains équilibres inobservables dans la limite $N \rightarrow \infty$.

Par analogie avec des procédés physiques, on parle d'un désordre « gelé » (*quenched*) pour désigner l'hétérogénéité de paramètres, lorsque celle-ci est donnée une fois pour toute, et de variables « recuites » (*annealed*), ou de variables « thermalisées », pour des paramètres qui participent à la dynamique au même titre que les variables d'état ω_i .

5. QUI SE RESSEMBLE S'ASSEMBLE

Considérons maintenant un cas particulier de modèle de choix discrets, proposé par Robert Axelrod en 1984 afin de modéliser la formation d'alliances, de coalitions, entre

nations ou entre firmes [Axelrod, 1997]. Dans ce cas les agents n'ont pas d'*a priori* individuel sur la décision à prendre ($H_i = 0$), et il n'y a pas de différence de coût entre les deux choix possibles ($P = 0$). L'utilité d'un agent i à faire un choix ω_i est renforcée si d'autres agents j ayant $J_{ij} > 0$ font le même choix que lui. Elle est au contraire diminuée si $J_{ij} < 0$. Il s'agit alors simplement pour les agents de décider à quel groupe adhérer parmi les deux regroupements possibles, ceux qui choisissent $\omega_i = 1$ (groupe A) ou ceux choisissant $\omega_i = 0$ (groupe B), en fonction de leurs affinités respectives.

Dans le cas de nations, Axelrod suppose que les affinités J_{ij} dépendent de critères économiques, historiques, culturels. Par exemple, des conflits passés entre deux nations i et j apportent une contribution négative à leur affinité J_{ij} , une religion dominante commune y contribue de manière positive, etc. Ainsi chaque affinité J_{ij} , qui peut être calculée comme la somme de ces termes pour certains positifs, pour d'autres négatifs, quantifie le biais en faveur ($J_{ij} > 0$) ou contre ($J_{ij} < 0$) la participation de deux pays i et j à une même alliance.

Par construction, ces affinités sont symétriques, $J_{ij} = J_{ji}$, de sorte que les équilibres (de Nash) sont les minima de « l'énergie » (11), qui s'écrit ici :

$$E[\vec{\omega}] = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \omega_i \omega_j \quad (13)$$

Dans l'espace $\vec{\omega}$ de toutes les configurations (coalitions) possibles, on a un paysage d'énergie, et les fonds de vallée (les minima) donnent les coalitions d'équilibre. Pour cette raison Axelrod parle de « landscape theory ».

Axelrod applique ce modèle à l'analyse de la formation de coalitions juste avant la seconde guerre mondiale, et obtient des résultats assez convaincants. Se fondant sur des données correspondant aux années 1936-1939 pour calculer les J_{ij} , il obtient deux minima relatifs. L'un correspond presque exactement aux alliances qui se sont effectivement réalisées au début de la guerre, et l'autre donne une alliance de la plupart des pays contre la Russie : une partition qui, quoique non réalisée, avait effectivement une certaine plausibilité. Cette seconde solution apparaît comme un minimum moins profond que la première, et disparaît avant 1939, le minimum correspondant aux alliances réalisées historiquement se creusant à l'approche de la guerre. Des variantes de ce modèle ont été discutées plus récemment [Florian, Galam, 2000], [Cont, Löwe, 2003].

En formulant son modèle Axelrod s'inspire de manière générale de la physique (notion d'équilibre définie par le minimum d'une énergie), mais aussi plus spécifiquement – pour ce qui est de la manière de construire les paramètres d'interaction J_{ij} – d'un modèle de réseaux de neurones proposé en 1982 par le physicien J. J. Hopfield [Hopfield, 1982], dans le but de rendre compte du caractère associatif de la mémoire humaine. Dans cette autre analogie, on considère un réseau de N ($\gg 1$) neurones décrits de manière schématique (« neurones formels »). Plus précisément, chaque neurone i peut être soit actif ($\omega_i = 1$), soit inactif ($\omega_i = 0$); l'activité d'un neurone j contribue à faciliter ou au contraire inhiber l'activité d'un neurone i selon que l'influence entre i et j , « l'efficacité synaptique » J_{ij} , est positive ou négative.

Si à l'instant t les activités neuronales sont $\vec{\omega}(t) = \{\omega_i(t), i = 1, \dots, N\}$, dans le cas d'une dynamique déterministe le neurone i passe dans l'état actif $\omega_i(t+1) = 1$ si $\sum_j J_{ij} \omega_j(t) > \theta_i$, où $\theta_i = -H_i$ est le seuil d'activation du neurone i . À partir d'une configuration d'activités initiale (imposée par un stimulus), le réseau évolue vers une configuration d'équilibre, qui est un minimum de l'énergie (11) (avec ici $P = 0$). La configuration d'activités ainsi atteinte est la réponse du réseau à la présentation du stimulus : c'est l'état d'équilibre (ou stationnaire) qui lui est associé à la suite de l'évolution dynamique. En choisissant bien les poids synaptiques (ce qui résulte théoriquement d'un apprentissage), les minima de l'énergie seront des configurations d'activités codant ce que l'on souhaite mémoriser, configurations qui pourront ainsi être rappelées, évoquées, par la présentation de stimuli qui leurs sont associés (mémoire associative). Ce modèle et ses variantes a fait l'objet d'importantes études depuis vingt ans, tout d'abord en physique statistique (cf. par exemple [Amit, 1989]) et plus récemment en mathématiques [Talagrand, 2003].

Le modèle d'interactions sociales d'Axelrod a été repris dans [Cont, Löwe, 2003] dans la limite d'un très grand nombre d'agents, pour caractériser plus finement ses propriétés à la lumière de l'ensemble des résultats obtenus sur le modèle de Hopfield. Explicitons plus précisément le modèle, avant de présenter les principaux résultats. On suppose que l'on peut établir les degrés d'affinité J_{ij} entre agents sur la base d'un ensemble de M critères. Pour simplifier, on se limite à des critères binaires. Par exemple : critère 1 \equiv *fumeur/non fumeur*, critère 2 \equiv *junior/senior*, critère 3 \equiv *pour/contre la constitution européenne*, ... L'affinité entre une paire d'agents i et j , J_{ij} , est la différence entre le nombre de critères sur lesquels ils sont d'accord, moins le nombre de critères sur lesquels ils diffèrent. On voit donc que si deux individus diffèrent sur plus de critères qu'ils ne coïncident, $J_{ij} < 0$. Maintenant la population doit se scinder en deux groupes ($\omega_i = 1$ pour le groupe A , $\omega_i = 0$ pour le groupe B), et chacun à titre individuel souhaite se retrouver dans le groupe qui va maximiser son affinité totale, qui n'est autre que l'utilité (7) avec $H_i = P = 0$. Ceci va conduire, comme expliqué plus haut, à une partition de la population (une configuration des choix $\vec{\omega}$) qui est un minimum de l'énergie (13). Le fait même qu'il existe une grande hétérogénéité des interactions, avec un mélange de poids positifs et de poids négatifs, conduit à l'existence d'un grand nombre d'équilibres. Si l'on considère une population de taille importante, on s'aperçoit qu'il est naturel de prendre comme paramètre le nombre de critères d'affinité rapporté à la taille de la population : formellement on considère la limite $N \rightarrow \infty$ à $\alpha \equiv M/N$ fixé. Dans cette limite asymptotique, les équilibres possibles peuvent être caractérisés de manière intéressante par leurs corrélations avec les critères utilisés pour construire les affinités. Ainsi, sous des hypothèses concernant la distribution des critères dans la population que nous n'explicitons pas complètement ici, on peut distinguer essentiellement deux régimes. Pour $\alpha < \alpha_c \sim 0.14$ les minima les plus importants correspondent à partitionner la population selon un et un seul critère : chaque individu maximise son utilité si la population « choisit » de se focaliser sur l'un quelconque des M critères (par exemple, les fumeurs d'un côté, les non fumeurs de l'autre). Ce choix collectif peut résulter d'une dynamique, telle celle évoquée plus haut (dynamique « myope », dans laquelle chaque agent révisé son choix à chaque instant en fonction

de ce qu'il observe) : il n'est pas nécessaire d'avoir coordination explicite. Ce sont les conditions initiales qui détermineront le critère particulier sur lequel se focalisera le groupe. Si au contraire $\alpha > \alpha_c$, les états d'équilibre n'ont plus de corrélations mesurables avec les M critères : dans toute partition optimale (équilibre de Nash) on aura dans chaque groupe un mélange d'individus de caractéristiques variées. En somme, si le nombre de critères déterminant les degrés d'affinité interpersonnelles est suffisamment grand, on aboutit collectivement à des états qu'on peut interpréter comme tolérants car les partitions en deux groupes ne sont pas uniquement déterminées par un seul critère d'affinité entre les personnes, même si chaque individu a des préférences claires et bien affirmées.

Une autre propriété importante du modèle, déjà annoncée dans les propriétés générales des systèmes de grande taille, est la robustesse aux perturbations. En particulier, si les agents prennent leurs décisions de manière non déterministe, par exemple selon la règle (9), on aura le même comportement qualitatif que pour la dynamique déterministe, avec un seuil critique $\alpha_c(T)$ fonction du niveau de bruit T . Comme $\alpha_c(T)$ diminue quand T augmente, des agents à la « main tremblante » sont (collectivement) plus facilement tolérants que des agents rationnels infaillibles...

6. DIAGRAMME DE PHASES DE CONSOMMATEURS SOUS INFLUENCE SOCIALE

Voici comment pourrait réfléchir un adolescent face à un article à la mode : « Je connais le prix du produit (par exemple une paire de baskets) ; il est plus cher que ce que je voulais payer..., mais si mes copains l'achètent, je l'achèterai pour être habillé comme eux ». Pour lui, l'utilité de l'achat inclut l'estime sociale, qui est d'autant plus grande que ses amis sont nombreux à acheter. Ce modèle de consommateur sensible à l'influence sociale se formalise dans le cadre général décrit section (4.), et est un exemple de situation avec externalités positives. Nous allons dans cette partie supposer que les poids J_{ij} sont positifs – dans le langage de la théorie des jeux il y a *complémentarité stratégique* entre les agents. Diverses variantes de ce modèle ont été utilisées en sciences économiques et sociales, aussi bien par des physiciens [Galam, Gefen, Shapir, 1982 ; Weisbuch, Stauffer, 2003] que des économistes [Blume, 1993 ; Orléan, 1995 ; Durlauf, 1997, 1999], ainsi que dans le cadre de collaborations physiciens-économistes – ce qui est notre cas [Gordon, Nadal, Phan, Vannimenus, 2005]. Nous allons nous limiter au cas le plus simple, et le plus discuté dans la littérature, celui d'un voisinage global (situation de « champ moyen ») et d'interactions homogènes : pour toute paire d'agents $i \neq j$:

$$J_{ij} = \frac{J}{N} > 0 \quad (14)$$

Le coefficient J indique le poids relatif de la décision des autres sur l'individu i . En revanche, les dispositions à adopter H_i sont hétérogènes. On les considère comme des variables aléatoires indépendantes générées selon une loi de probabilité $\rho(\cdot)$.

On a donc un ensemble d'agents économiques ayant des prix de réserve idiosyncratiques H_i , devant décider d'acheter ($\omega_i = 1$) ou non ($\omega_i = 0$) un bien unique

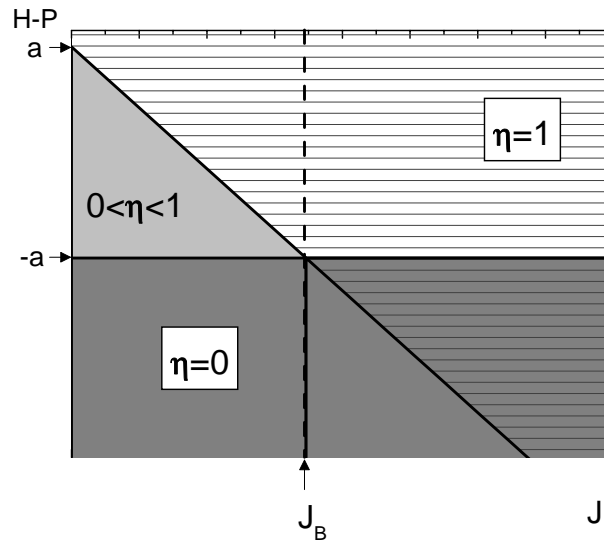


FIG. 4. Diagramme de phases du consommateur pour une distribution des H_i uniforme, de moyenne H et variance unitaire. Pour $J < J_B$ la fraction d'acheteurs dans la population, η , est une fonction univoque de $H-P$ et J . Pour $J > J_B$ la région grise et hachurée correspond à la coexistence de deux solutions, une avec une grande proportion η d'acheteurs (dans le cas de la distribution uniforme, $\eta = 1$: tous les consommateurs achètent) et l'autre avec peu d'acheteurs (ici, $\eta = 0$).

proposé au prix P . En absence d'influence sociale la décision est immédiate : si $H_i > P$ alors i achète, si $H_i < P$, i n'achète pas. Sous l'influence sociale (14), l'agent i souhaite acheter si $H_i > P - J\eta$, et ne pas acheter sinon, η étant la fraction d'acheteurs dans la population :

$$\eta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j. \quad (15)$$

Blume [1993] et Durlauff [1997] ont étudié les états d'équilibre de ce système, en particulier pour une dynamique « myope » de meilleure réponse, dans laquelle les individus prennent leurs décisions connaissant les décisions des autres, comme dans notre exemple du Séminaire mourant, et dans le cas particulier où la distribution des H_i au sein de la population suit une loi logit de paramètre β

$$\text{Proba}(H_i - H < z) = \frac{1}{1 + \exp - \beta z}, \quad (16)$$

avec H valeur moyenne des H_i . β est inversement proportionnel à la variance de la distribution des H_i , et donne en fait l'échelle de mesure des grandeurs pertinentes : les propriétés du modèle dépendent uniquement de deux paramètres indépendants, la moyenne normalisée de la distribution βH et la valeur normalisée du poids de l'influence sociale βJ (de manière équivalente, on peut travailler sans perte de généralité en considérant $\beta = 1$). On trouve que, dépendant de ces deux paramètres, il peut exister un ou deux équilibres, comme nous l'avons vu dans l'exemple du Séminaire mourant. Notons que si la distribution des H_i était bimodale (avec deux maxima), on s'attendrait à avoir deux équilibres, car une telle distribution refléterait le fait que l'on a deux types de sous-populations : ceux qui sont prêts à payer cher et ceux qui n'achètent que si le prix est bon marché. Ce qui est intéressant ici est que les deux équilibres existent aussi pour une distribution *monomodale* régulière comme la logit.

Remarquons que l'hypothèse d'interactions homogènes nous place de nouveau dans la situation d'interactions symétriques, de sorte que, comme expliqué plus haut, section (4.2.), la dynamique myope de meilleure réponse converge vers les états d'équilibre du système, c'est-à-dire vers les minima de l'énergie (ou les états stationnaires à « température » T finie) du modèle d'Ising correspondant.

Plus récemment nous avons montré [Gordon *et al*, 2005], [Nadal *et al*, 2004] que ce modèle de consommateurs hétérogènes présente en fait des propriétés très générales, quelle que soit la distribution monomodale des H_i . Plus précisément, il existe une valeur J_B du poids de l'influence sociale qui marque la frontière entre deux types de comportements : pour $J < J_B$, si l'on change H – la valeur moyenne des H_i – ou le prix du produit (plus exactement, si on change la différence $H - P$) continûment, la fraction de consommateurs acheteurs η varie, elle aussi, continûment. Pour $H - P$ très négatif, η est très petit ou nul, et augmente avec $H - P$ jusqu'à $\eta = 1$ pour $H - P \rightarrow \infty$. Par contre, lorsque $J > J_B$, il existe tout un domaine de valeurs de $H - P$ pour lesquels le système présente deux états d'équilibre possibles. Comme dans l'exemple du Séminaire mourant, lequel des deux sera atteint par le système dépend des détails de la dynamique.

Il est convenable de représenter ces propriétés dans un « diagramme de phases », qui permet de décrire les caractéristiques du système dans un plan d'abscisses J et ordonnées $H - P$. La Figure 4 en est un exemple. Il correspond à la distribution la plus simple, une distribution uniforme des $(H_i - H)$ entre $-a$ et a ($a \equiv \sqrt{3}$), de moyenne nulle et variance unité. Sur la ligne $J = 0$ on voit que la fraction d'acheteurs augmente lorsque le prix diminue ($H - P$ augmente), et que quand celui-ci est inférieur à $H - a$ (le prix de réserve le plus petit dans la population) tous les consommateurs achètent le produit. Pour $0 < J < J_B$, on peut voir que, grâce aux externalités, la proportion d'acheteurs atteint la saturation de 100% de la population à des prix d'autant plus hauts que J est grand. À $J = J_B$, toute la population achète dès que le prix atteint la valeur du prix de réserve le plus élevé, $H + a$: l'influence sociale est tellement forte que dès qu'au moins un individu décide d'acheter – celui qui a le prix de réserve le plus grand –, il entraîne toute la population ! Si $J > J_B$, on voit sur le diagramme la région de coexistence. Il est intéressant de remarquer que l'équilibre avec un grand nombre d'acheteurs (100% d'acheteurs pour la distribution uniforme) existe même si le prix est tellement élevé qu'en absence d'externalités aucun agent n'aurait acheté le bien.

Remarque : on atteint la saturation $\eta = 1$ à $H - P$ fini parce que dans l'exemple traité ci-dessus la distribution des H_i a un support fini (compact). Dans le cas général d'un support infini (comme avec la logit), on a $\eta = 1$ seulement dans la limite $H - P \rightarrow \infty$. De manière plus générale le diagramme de phases « s'adoucit ». On garde des transitions nettes, comme dans le cas d'un support compact, mais dans une même phase (dans un domaine) on a des variations continues de η , qui reste toujours strictement compris entre 0 et 1.

Au voisinage du seuil critique, J_B , on a des propriétés très particulières donnant lieu à des comportements « universels » (qui ne dépendent pas des détails du modèle). Un travail très récent (cf. [Michard et Bouchaud, 2005]) analyse différents phénomènes, comme l'évolution des achats de téléphones portables, l'évolution des taux de naissances, et montre un bon accord entre les données empiriques et les prédictions théoriques : si on regarde le pic de variation (du taux de vente, des taux de naissances, et pour divers pays), la valeur maximale h du taux d'évolution et la largeur w du pic sont reliées par une loi de puissance $h \sim w^{-\kappa}$, avec κ de l'ordre de $2/3$. L'existence de cette loi de puissance et la valeur de l'exposant sont des exemples de propriétés universelles.

7. LE DILEMME DU VENDEUR

Reprenons notre modèle de marché avec un seul bien et un vendeur en situation de monopole. Cet unique vendeur cherchera à maximiser son profit à partir de ses connaissances sur la demande. S'il connaît les caractéristiques statistiques de la population (c'est-à-dire en particulier la distribution des dispositions à payer H_i , et la valeur de J), il peut calculer la demande pour tout prix fixé P , et donc en principe calculer le prix P^* qui maximise son profit $\Pi(P) = (P - C) N\eta(P)$, où C est le coût de production d'une unité du bien, et $\eta(P)$ la demande au prix P que nous avons étudiée dans la section précédente. On peut analyser en détail ce

problème d'optimisation [Gordon, Nadal, Phan, Vannimenus, 2005 ; Nadal, Phan, Gordon, Vannimenus, 2004], et obtenir pour toute distribution donnée des H_i un diagramme de phase, cette fois du vendeur, dont un exemple est donné sur la figure 5. Ce diagramme partitionne l'espace des paramètres $H - C, J$ en domaines, chacun étant caractérisé par le type de stratégie (= le choix d'un prix) optimale pour le vendeur. Pour H suffisamment négatif et/ou J suffisamment petit, il y a une unique stratégie optimale pour le vendeur, pour laquelle le nombre d'acheteurs sera faible et le prix de vente élevé. De manière analogue, pour H suffisamment grand et/ou J suffisamment grand, il y a une unique stratégie optimale pour le vendeur, pour laquelle le nombre d'acheteurs sera grand et le prix bas. Pour J inférieur à un certain seuil J_A , on passe continuellement d'une situation à l'autre lorsque H augmente de $-\infty$ à $+\infty$. En revanche, pour $J > J_A$, on a un domaine de l'espace des paramètres avec coexistence des deux stratégies. La situation est de nouveau analogue à celle décrite pour le Séminaire mourant et pour le diagramme de phase du consommateur : on observe une transition de phase du 1er ordre.

La possibilité d'une coexistence de deux solutions induit un dilemme pour le vendeur : doit-il vendre à prix élevé à une minorité, ou à prix bas au plus grand nombre ? Si le vendeur ne connaît pas avec précision les paramètres (la forme de la distribution des H_i , les valeurs de H, J, \dots), il sait néanmoins qu'il doit s'attendre à un diagramme de phase comme celui présenté ici. Grâce à une campagne publicitaire, il se peut qu'il obtienne une augmentation de H (« c'est le produit qu'il vous faut ») ou de J (« tout le monde l'adopte, pourquoi pas vous ? »). Cependant, du fait du caractère discontinu de la transition, le vendeur ne dispose pas d'indicateur lui permettant de savoir à quel moment il peut modifier de manière très importante son prix pour augmenter son profit – une petite variation du prix ne produit qu'une petite variation de la demande, mais ne permet pas de « voir » l'existence d'un autre équilibre à une valeur très différente du prix courant.

8. DISCUSSION

Nous avons présenté divers modèles de choix discrets avec externalités, qui sont modélisés avec des approches inspirées de la physique, et plus particulièrement du modèle d'Ising. Ces modèles permettent d'aller au delà de la considération d'un agent représentatif, qui aurait le comportement moyen de la population. Ainsi, on voit que l'effet de l'influence sociale donne lieu de manière générique à l'apparition d'équilibres multiples. Il s'agit de conséquences de la non linéarité des équations, qui fait que le comportement du système ne peut pas être représenté par une simple moyenne des comportements des individus. Pour une population composée d'un grand nombre d'agents, le comportement collectif est néanmoins bien défini par des variables globales (« paramètres d'ordre » en physique), ceci même en présence d'aléa dans les décisions individuelles ('main tremblante'). On retrouve là la possibilité d'un ordre au niveau collectif, pouvant sembler répondre à une logique rationnelle, mais avec des comportements individuels très hétérogènes et fluctuants [Kirman, 1997].

Nous nous sommes limités à des cas d'interactions globales, et nous avons souligné que dans le cadre de la physique, les modèles avec des interactions locales,

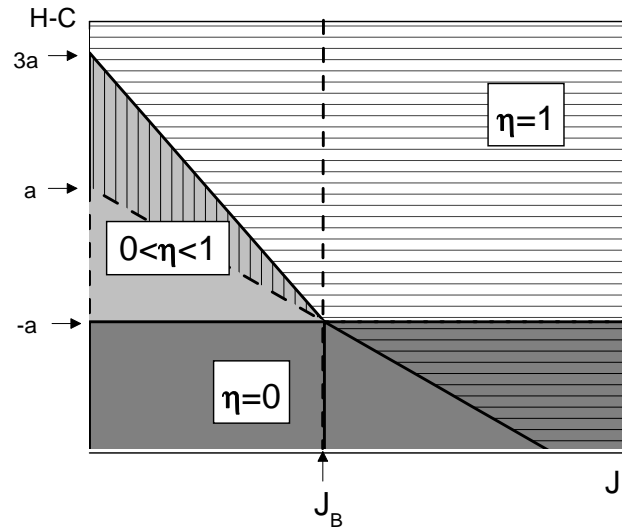


FIG. 5. Diagramme de phases du vendeur, présentant les différents régimes de consommation au prix qui optimise son profit, pour des consommateurs correspondant au diagramme de la Figure 4. Pour $J < J_B$ (en général on aura $J < J_A$ avec $J_A \leq J_B$, la distribution uniforme présentant une dégénérescence), la fraction d'acheteurs η au prix optimal est une fonction monotone croissante de $H - C$. Au dessus de la ligne pointillée, dans la région hachurée verticalement, le profit a un deuxième maximum relatif, à un prix inférieur à l'optimal mais qui permettrait que tous les consommateurs achètent. Cependant, le profit serait inférieur à celui de l'optimum ; l'adoption globale du produit étant la solution optimale seulement dans la région hachurée horizontalement. Pour $J > J_B$, dans la région grise hachurée horizontalement, le profit présente aussi deux maxima relatifs. Mais ici la fraction η n'est pas univoque, et le monopoliste peut ne pas obtenir le profit escompté, comme c'est discuté dans le texte.

limitées à des sous-ensembles d'agents qu'on appelle « voisins », n'ont pas encore reçu une solution générale. Cette difficulté est très pertinente en physique, car les interactions dans la matière ont de courtes portées et sont donc limitées à des voisinages restreints. Dans les systèmes sociaux on peut aussi rencontrer des situations avec voisinage local, mais dans bien des cas on aura à considérer un réseau d'interactions sociales assez large, et pour une bonne part « aléatoire ». Dans certaines situations, chaque individu peut avoir accès à des informations vraiment globales (celles que donnent les sondages par exemple). Mais dans la majorité des situations il faudrait pouvoir connaître la structure du réseau social impliqué. On sait déjà depuis longtemps qu'on trouve facilement des structures de type « petit monde » (une majorité de liens locaux et une petite fraction de liens à longue distance). De nombreux travaux portent depuis quelques années tant sur l'analyse empirique de réseaux sociaux que l'analyse théorique, soit de leur formation, soit des conséquences d'une telle structure sur le comportement collectif. Nous ne tenterons pas ici de donner une bibliographie de tout ce courant de recherche – qui ne concerne pas seulement les sciences sociales, mais aussi celles du vivant et celles des technologies de l'information – mais nous signalons néanmoins le travail original récent de Ehrhardt et al. [2004] (collaboration entre économistes et physiciens), qui étudie une dynamique couplée de constitution d'un réseau social et de l'adoption d'un comportement.

Finalement, on peut remarquer que nous avons analysé des états d'équilibre, et que ceux-ci peuvent être atteints si les agents ont une information complète et des comportements myopes de meilleure réponse. L'existence des équilibres (de Nash) dans les modèles considérés dans cet article est garantie par la particularité que les interactions sont symétriques. Dans le cas d'aléa dans les décisions individuelles, une dynamique myope conduira à un état stationnaire qu'on peut là encore complètement caractériser dans le cas d'interactions symétriques (on a alors un équilibre proche, mais pas identique, à ce qui s'appelle le « Quantal Response Equilibrium », QRE, en économie). En absence de symétrie, on n'a plus d'analogie exacte avec des modèles de physique, et surtout on ne peut plus garantir en toute généralité l'existence d'équilibres de Nash. Cependant, tant que les interactions ne sont pas « trop » dissymétriques, des travaux effectués en physique et mathématique sur la modélisation de réseaux de neurones (analogie évoquée dans la section 5.) suggèrent qu'on peut s'attendre aux mêmes propriétés qualitatives qu'avec des interactions symétriques. Par contre, pour de fortes dissymétries, on pourra ne plus avoir d'équilibres de Nash et, dans le cas d'une dynamique myope de meilleure réponse, une évolution temporelle chaotique. Ajoutons que même dans le cas symétrique, pour une dynamique myope synchrone (tous les agents prenant leur décision en même temps) on peut avoir, en plus des points fixes, des oscillations entre deux configurations.

Il est naturellement également important d'élargir la recherche en étudiant les dynamiques et les équilibres atteints lorsque les agents doivent anticiper les décisions des autres pour estimer leurs utilités, comme indiqué par l'équation (4). Ceci suppose une modélisation des capacités cognitives des agents, et de leurs capacités d'apprentissage [Gordon, Nadal, Phan, Semeshenko, 2004]. Nous n'avons pas abordé cet aspect dans cet article, mais c'est un domaine de recherches très actif

actuellement.

Remerciements. Cet article a été rédigé à la suite du colloque du CERMSEM « Modèles et méthodes mathématiques dans les sciences sociales : apports et limites » : l'un de nous (JPN) remercie les organisateurs Joseph Abdou et Bernard Monjardet pour l'invitation à y présenter un point de vue de physicien. Nous remercions André Orléan pour une lecture critique du manuscrit que nous avons fort appréciée.

Par ailleurs, nous remercions les collègues qui nous ont introduit dans le monde des sciences économiques et sociales, tout particulièrement lors des Ecoles du CNRS « Economie Cognitive » (2000 et 2001), et tout spécialement notre collaborateur Denis Phan. Nous remercions également nos collègues de la « tribu » ELICCIR, projet interdisciplinaire financé par l'ACI Systèmes Complexes en Sciences Humaines et Sociales, dans le cadre duquel a été effectué ce travail.

Nota Bene. Alors que cet article était sous presse, c'est avec grand plaisir que nous avons appris que le prix Nobel d'économie 2005 a été décerné à Thomas Schelling.

BIBLIOGRAPHIE

- AMIT D. J., *Modeling Brain Function*, Cambridge, Cambridge University Press, 1989.
- AXELROD R., *The complexity of cooperation*, Princeton, Princeton University Press, 1997.
- BALIAN R., *From Microphysics to Macrophysics*, Springer, 1992.
- BALL P., "The physical modelling of human social systems", *Complexus* 1, 2003, p. 190-206.
- BLUME L.E., "The statistical mechanics of strategic interaction", *Games and Economic Behavior* 5, 1993, p. 387-424.
- COLLIN D., « Attila passe, l'herbe repousse », *L'Agora* 7, 1, 1999 (<http://agora.qc.ca/reftext.nsf/Documents/Resilience>).
- CONT R., LÖWE M., 'Social distance, heterogeneity and social interactions, rapport interne du CMAP, n° 505, 2003 (<http://ssrn.com/abstract=417264>).
- DURLAUF S.N., "Statistical mechanics approaches to socioeconomic behavior", W.B. Arthur, S.M. Durlauf, D. Lane (eds), *The Economy as an Evolving Complex System II*, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Volume XVII, Addison-Wesley (MA), 1997.
- DURLAUF S.N., "How can statistical mechanics contribute to social science?", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 96, 1999, p. 10582-10584.
- EHRHARDT G., MARSILI M., VEGA-REDONDO F., "Emergence and resilience of social networks : a general theoretical framework", *Working paper*, <http://merlin.fae.ua.es/fvega/>, 2004.
- FLORIAN R.V., GALAM S., "Optimizing conflicts in the formation of strategic alliances", *European Physical Journal B* 16, 2000, p. 189-194.
- FOLLMER H., "Random economies with many interacting agents", *Journal of Mathematical Economics* 1(1), 1974, p. 51-62.

- GALAM S., AHARONY A., "New multicritical points in anisotropic magnets, i. ferromagnets in a random longitudinal field", *Journal of Physics C* 13, 1980, p. 1065-1081.
- GALAM S., GEFEN Y., SHAPIR Y., "Sociophysics : A mean behavior model for the process of strike", *Mathematical Journal of Sociology* 9, 1982, p. 1-13.
- GORDON M., NADAL J.-P., PHAN D., SEMESHENKO V., "How to choose under social influence?", *First European Conference on Cognitive Economics (ECCE1)*, <http://ceco.polytechnique.fr/COLLOQUES/ECCE1/index2.htm>, Sept. 22-24 2004.
- GORDON M. B., NADAL J.-P., PHAN D., VANNIMENUS J., "Seller's dilemma due to social interactions between customers", *Physica A* 356 (2-4), 2005, p. 628-640.
- GRANOVETTER M., "Threshold Models of Collective Behavior", *American Journal of Sociology* 83(6), 1978, p. 1360-1380.
- HOPFIELD J.J., "Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 79, 1982, p. 2554-2588.
- KINDERMANN R., SNELL J.L., *Random Markov Fields and their Applications*, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1980.
- KIRMAN A.P., "The Economy as an Interactive System", *The Economy as an Evolving Complex System II*, Arthur, Durlauf and Lane (eds), Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Volume XXVII, Addison-Wesley, 1997, p. 491-531.
- MANSKI C., "The structure of random utility models", *Theory and Decision* 8, 1977, p. 229-254.
- McFADDEN D., "Quantal choice analysis : A survey", *Annals of Economic and Social Measurement* 5, n° 4, 1976, p. 363-390.
- MÉZARD M., PARISI G., VIRASORO M., *Spin Glass Theory and Beyond*, World Scientific, 1987.
- MICHARD Q., BOUCHAUD J.-P., *Theory of collective opinion shifts : from smooth trends to abrupt swings*, preprint 2005. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0504079>.
- NADAL J.-P., PHAN D., GORDON M.B., VANNIMENUS J., "Multiple equilibria in a monopoly market with heterogeneous agents and externalities", *preprint 2004*, à paraître dans : *Quantitative Finance*.
- NADAL J.-P., WEISBUCH G., CHENEVEZ O., KIRMAN A., "A formal approach to market organisation : Choice functions, mean field approximation and maximum entropy principle", Lesourne and Orléan (eds), "Advances in Self-Organization and Evolutionary Economics", *Economica*, 1998, p. 149-159.
- ONSAGER L., "Crystal statistics.i. a two-dimensional model with an orderdisorder transition", *Physical Review* 65, 1944, p. 117-149.
- ORLÉAN A., "Bayesian interactions and collective dynamics of opinion : Herd behaviour and mimetic contagion", *Journal of Economic Behavior and Organization* 28, 1995, p. 257-274.
- PHAN D., GORDON M.B., NADAL J.-P., "Social interactions in economic theory : an insight from statistical mechanics", Nadal J.-P., Bourguine P. (eds), *Cognitive Economics*, Springer, 2004, p. 335-358.
- SCHELLING T.S., *Micromotives and Macrobehavior*, W.W. Norton and Co, N.LY., 1978.

SETHNA J.P., DAHMEN K., KARTHA S., KRUMHANSL J.A., ROBERTS B.W., SHORE J.D., "Hysteresis and hierarchies : Dynamics of disorder-driven first-order phase transformations", *Physical Review Letters* 70, 1993, p. 3347-3350.

TALAGRAND M., *Spin Glasses : A Challenge for Mathematicians*, Springer, 2003.

THURSTONE L.L., "Psychological analysis", *American Journal of Psychology* 38, 1927, p. 368-398.

WEISBUCH G., STAUFFER D., "Adjustment and social choice", *Physica A* 323, 2003, p. 651-662.

??